THESE

présentée pour l'obtention du

DIPLOME de DOCTEUR - INGENIEUR

UNIVEPSITE PIERRE et MARIE CURIE

- PARIS VI -

Mention : MECANIQUE APPLIQUEE A LA STRUCTURE

Par : Iskandar AMJA

Sujet : Etude de la Résistance d'une Structure Métallique à partir de la Notion d'Hétéro- Plasticité.

Soutenue le :

Devant la Commission d'examen composée de : 1976

M. R. SIESTRUNCK Président

M. R. MAZET Examinateur

M. J. LEMAITRE Examinateur

M. R. VICHNIEVSKY Examinateur.

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE
E.N.S.E.T 61 Av. du PRESIDENT WILSON
94230 CACHAN

THESE

présentée pour l'obtention du

DIPLOME de DOCTEUR - INGENIEUR

UNIVEPSITE PIERRE et MARIE CURIE

- PARIS VI -

Mention : MECANIQUE APPLIQUEE A LA STRUCTURE

Par : Iskandar AMJA

Sujet : Etude de la Résistance d'une Structure Métallique à partir de la Notion d'Hétéro- Plasticité.

Soutenue le :

Devant la Commission d'examen composée de :

M. R. SIESTRUNCK	Président
M. R. MAZET	Examinateur
M. J. LEMAITRE	Examinateur
M. R. VICHNIEVSKY	Examinateur.

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE
E.N.S.E.T 61 Av. du PRESIDENT WILSON
94230 CACHAN

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

J'exprime à Monsieur le Professeur R. MAZET, toute ma reconnaissance et ma gratitude pour m'avoir donné le goût de l'étude et de la recherche en Mécanique des Solides. Je lui dois d'avoir mené à terme ce travail et le remercie pour les nombreux conseils et directives donnés et pour la patience qu'il a bien voulu manifester tout au long de ce travail.

A Monsieur J. LEMAITRE, mes remerciements pour les encouragements qu'il m'a prodigués et pour la peine prise à lire ce travail et le fait d'avoir bien voulu être le Directeur de mon travail.

A Monsieur R. SIESTRUNCK et Monsieur R. VICHNIEVSKI, mes remerciements pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à cette recherche en acceptant d'être membres du Jury.

A Monsieur C. GALHARAGUE, mes remerciements et mon amitié pour les encouragements et les conseils pratiques prodigués lors de mes travaux.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548124_0010

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I : LA NOTION DES CHARGES LIMITES.

I. POSE DU PROBLEME.

II. DEFINITION DE LA STRUCTURE.

III. HYPOTHESE DU FLUAGE LOCALISE.

IV. CHOIX DES EMPLACEMENTS DES CHARNIERES.

V. LOI DE COMPORTEMENT DU MATERIAU HETERO-PLASTIQUE.

. Application à la fléxion plane.

VI. LA METHODE GENERALE D'ETUDE.

VII. EQUATION D'EQUILIBRE .

VIII. TRAITEMENT DES EQUATIONS D'EQUILIBRE .

CHAPITRE II : APPLICATION A UN PORTIQUE.

PREMIERE PARTIE : DEFINITION DU PORTIQUE

I. GENERALITES.

II. CAS ELASTIQUE.

III. EMPLACEMENT DES CHARNIERES.

IV. ETUDE DU COMPORTEMENT DU PORTIQUE.

V. EQUATIONS DE LA DEFORMEE MOYENNE.

VI. EQUATIONS D'EQUILIBRE .

VI.1. Equation de LAGRANGE.

VI.2. Condition aux frontières élastiques.

DEUXIEME PARTIE : DEFINITION ET ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE DANS LE CADRE DES NEUF MECANISMES

I. EQUATION DU COMPORTEMENT.

II. EXAMEN DES DIFFERENTS MECANISMES.

II.1. Equilibre sous comportement élastique.

II.2. Equilibre élastique en B avec équilibre élasto-plastique en O.

II.3. Equilibre élastique en B avec fluage asymptotique en O.
II.4. Equilibre élasto-plastique en B avec équilibre élastique en O.
II.5. Equilibre élasto-plastique en O et B.
II.6. Equilibre élasto-plastique en B avec fluage asymptotique en O.
II.7. Fluage asymptotique en B avec équilibre élastique en O.
II.8 Fluage asymptotique en B avec équilibre élasto-plastique en O.
II.9. Fluage asymptotique en O et B.

III. INTERPRETATION DES RESULTATS.

TROISIEME PARTIE : COMPARAISON AVEC LA METHODE CLASSIQUE DES CHARGES LIMITES .

I. EVALUATION DE LA CHARGE LIMITE D'UN SYSTEME ELASTO-PLASTIQUE "PARFAITEMENT PLASTIQUE".

I.1. Méthode statique.
I.2. Méthode cinématique.

II. DOMAINE DE VALIDITE CAS DE FLAMBEMENT.

III. CONCLUSION.

CHAPITRE III : VERIFICATION EXPERIMENTALE

I. INTRODUCTION.
II. ACQUISITION DES DONNEES.

II.1. La force appliquée.
II.2. La déformation du portique.

III. RESULTATS DES ESSAIS.
IV. COMPARAISON THEORIE-EXPERIENCE.
V. CONCLUSION

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=

ANNEXE I : COMPORTEMENT HETERO-PLASTIQUE DES MATERIAUX METALLIQUES.

I. INTRODUCTION.

II. MATERIAUX HETERO-PLASTIQUES.

III. COURBE CONTRAINTE-DEFORMATION A VITESSE CONSTANTE.

IV. HYPOTHESE SUR LES LOIS CONSTITUTIVES DU MATERIAU.

IV.1. A l'échelle microscopique.

IV.2. A l'échelle macroscopique.

V. NOUVELLE RELATION CONTRAINTE-DEFORMATION.

VI. COMPARAISON AVEC UNE LOI STATISTIQUE NORMALE.

ANNEXE II : DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAU UTILISE.

I. DISPOSITIF.

II. ESSAI D'ECROUISSAGE.

III. ESSAI DE RELAXATION.

IV. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA FONCTION $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

V. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA FONCTION $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

ANNEXE III : COURBES ET TABLEAUX D'ESSAIS.

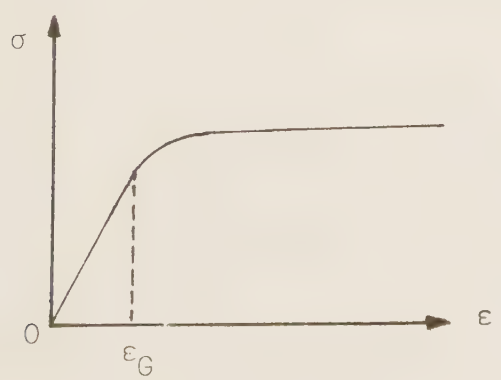
INTRODUCTION :

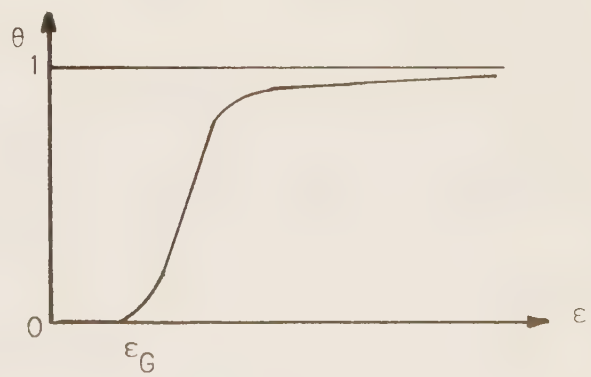
Le choix et l'utilisation de matériaux convenant à une structure donnée sollicitée sous certaines conditions, nécessitent de plus en plus à l'heure actuelle, de connaître le comportement de cette structure au-delà du domaine élastique. A ce stade, on se heurte à de grandes difficultés dûes à la non-linéarité des phénomènes et au grand nombre de paramètres mis en jeu .

Pour mettre en évidence tous les phénomènes physiques de la matière, il est nécessaire de faire une étude microscopique et d'établir un lien entre les comportements microscopique et macroscopique.

Une approche consiste à imaginer des modèles élémentaires simples, qui par regroupement permettent de retrouver les propriétés globales du matériau. Ce type de loi a été défini par R. MAZET (*).

Il met en évidence un matériau que nous appellerons matériau hétéroplastique. Il s'agit d'un matériau composé de micro-éléments enchevêtrés ayant chacun une limite élastique ε_{Mi} différente dans la direction où le matériau est sollicité. Les limites ε_{Mi} sont supposées obéir à une loi statistique de distribution entre un minimum ε_G (limite élastique vraie) et $+\infty$. Cette loi est spécifique du matériau, du traitement antérieurement subi et de la température. Le matériau est hétérogène à l'échelle microscopique, mais homogène et isotrope à l'échelle macroscopique, la distribution est caractérisée par le taux de plastification $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ qui exprime dans un essai de traction isotherme à vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, constante, le rapport entre la "section fluante" (au sens de LEBESGUE) de l'éprouvette et la section totale S. L'expérience montre que θ est pratiquement indépendant de $\dot{\varepsilon}$.





(*) Cours de Mécanique des Solides de l'Université de PARIS-SUD (ORSAY) 1973.

Dans un premier temps, nous définissons avec précision la notion de charge limite en partant du problème d'élasto-plasticité. On rappelle dans quelles conditions et pour quelles applications, il est possible d'utiliser le schéma de comportement des matériaux hétéro-plastiques. Il s'agit ensuite de la recherche des chargements correspondants à l'apparition d'une charnière plastique. La nature particulière de ce problème entraîne que les conditions à la limite ne peuvent être posées de façon classique, on précise les équations d'équilibre et les équations aux limites en termes de paramètres de déformation. Tant que la déformation reste inférieure à une certaine valeur, elle est gouvernée par un seul paramètre élastique q_o , ensuite elle est gouvernée par plusieurs paramètres élasto-plastiques $q_I, q_2, q_3, q_4, \ldots$ et élastique q_o.

Pour cela nous avons étudié la résistance d'une structure hétéroplastique lamellaire, dont la déformation dépend d'un paramètre dominant ξ , soumise à une charge croissant à partir de zéro. Ayant fait l'hypothèse que la déformation plastique était localisée dans une ou plusieurs "charnières plastiques", nous avons suivi l'évolution au fur et à mesure que la charge croissait.

Puis, la méthode consiste à écrire les équations d'équilibre et à envisager les possibilités indépendamment les unes des autres, et à chercher leurs conditions de validité, et la charge correspondant à chaque comportement de la structure est calculée sur la base du respect des conditions d'équilibre et des conditions de plasticité en tous les points des charnières de la structure.

Cette étude nous conduit à mettre en évidence pour chaque type de comportement envisagé, une charge, la borne supérieure de ces charges définissant ce que nous conviendrons d'appeler la ruine totale, les autres pouvant entraîner ce que nous appelerons ruine partielle pour la structure. Pratiquement, le calcul se ramènera à la détermination d'une fonction $q_j J(q_j)$"définie ultérieurement" dont la variation permettra de caractériser la charge entrainant la ruine.

Dans un deuxième temps, une application a été faite au cas d'un portique métallique encastré aux extrémités inférieures, et supportant en son milieu une charge $F(t)$. Le matériau utilisé est un duralumin AU4G du commerce. C'est un alliage métallique cristalisant dans le système C.F.C.

Les résultats seront ensuite confrontés avec ceux que l'on obtient en utilisant

.../...

la méthode classique des charges limites. Une parenthèse sera introduite pour faire intervenir le phénomène du flambement, phénomène qui a son importance lorsqu'on aura dit que ces résultats seront vérifiés expérimentalement sur un portique.

Le point fondamental qui ressort de cette étude, est son utilité pour résoudre les cas d'équilibre élasto-plastique et calculer les charges qui provoquent la ruine totale. La méthode mise en oeuvre est axée principalement, sur la mise en évidence de solutions complètes et se révèle, efficace, comme le montre l'exemple traité.

CHAPITRE I

LA NOTION DES CHARGES LIMITES

1. POSE DU PROBLEME :

Etant donnée une structure en matériau hétéro-plastique, on se propose de déterminer l'état d'équilibre élasto-plastique de ce système soumis à un certain type de chargement.

La résolution d'un tel problème ne peut se faire que pas à pas en suivant le trajet de charge. L'état d'équilibre dépend du trajet de charge suivi pour atteindre le chargement limite qui entraîne la ruine de la structure. Considérons tout d'abord, le cas d'une structure "isostatique" formée de barres à inertie constante et soumise uniquement à des charges concentrées (Fig. 1).

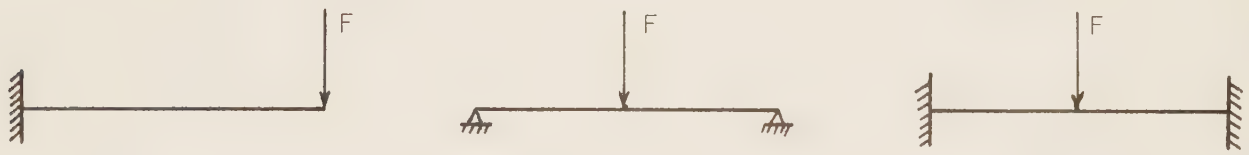


Figure 1.

Nous faisons l'hypothèse que la déformation plastique apparaît lorsque la déformation élastique dépasse une certaine valeur, nous admettons que cette déformation est localisée au voisinage des points d'application des charges et aux extrémités des poutres. L'application du théorème des travaux virtuels, donne les équations d'équilibre statique desquelles on déduit la charge limite. Dans le cas d'une structure "hyperstatique", nous pourrons calculer les charges limites d'une structure en introduisant le fluage asymptotique, (vitesse de déformation plus grande que zéro), la ruine de la structure ne se produira que lorsque cette structure sera transformée en mécanisme (type de comportement). Prenons l'exemple d'une poutre AB de longueur L, encastrée à ses deux extrémités et supportant une charge uniforme F (Fig.2).

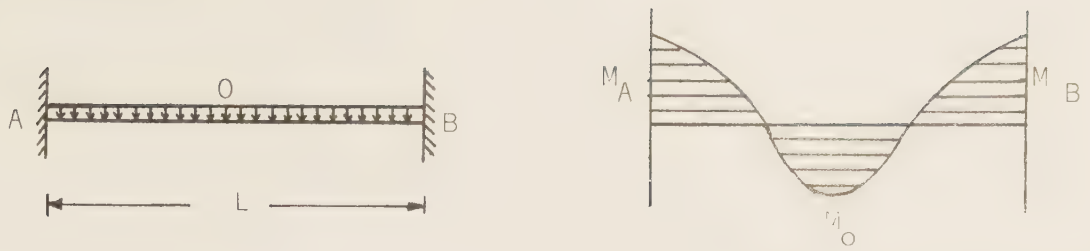


DIAGRAMME DES MOMENTS.

FIGURE II.

Choisissons le mécanisme comportant un équilibre élastique en o au cours de l'évolution complète "fluage asymptotique" de la poutre qui voit les encastrements en A et B, céder progressivement sous la charge constante, que nous appellerons charge entraînant la ruine partielle. Dans l'état limite, la poutre est élastique sur toute sa longueur et en équilibre, tout se passe comme si, simplement appuyée en A et B, elle y subissait des couples résistants résiduels.

Inversement, considérons le mécanisme qui montre que les états en O, A et B évoluent vers un fluage asymptotique : la charge qui correspond à cet état, provoque la ruine, au delà de laquelle, il n'est plus possible de faire croître la charge, cet état caractérisant ce que nous appellerons la ruine totale pour la structure.

II. DEFINITION DE LA STRUCTURE :

Nous dirons qu'une structure se comporte comme une structure lamellaire, quand les sections normales se conservent au 2ème ordre près, relativement à une base fixée OXYZ (Fig.3), la position de la structure sera caractérisée par le déplacement dominant $\vec{U}$ de chacun de ses points Q à partir de la position d'équilibre non chargée. Ce déplacement est défini par des expressions de la forme :

$$\vec{U}(Q,t) = \begin{cases} \vec{U}_1(Q,t)=\vec{a}_1(Q)\left\{f(Q_0,t)\right\}+\vec{a}_1(Q,t) \\ \vec{U}_2(Q,t)=\vec{a}_2(Q)\left\{f(Q_0,t)\right\}+\vec{a}_2(Q,t) \\ \vec{U}_3(Q,t)=\vec{a}_3(Q)\left\{f(Q_0,t)\right\}+\vec{a}_3(Q,t) \end{cases} \qquad (I\text{-}I)$$

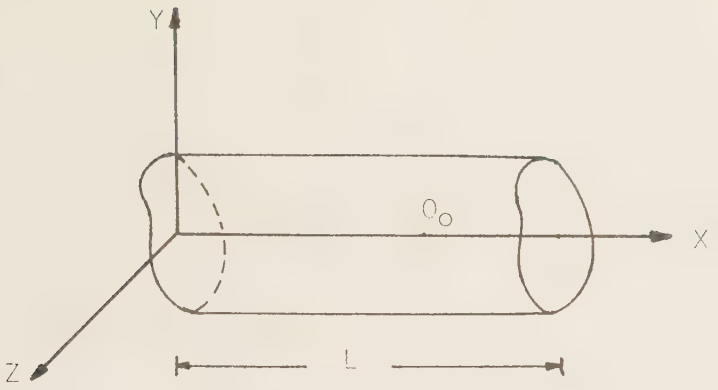


FIGURE III.

où

Q_o : désigne l'abscisse d'un point de la ligne moyenne d'une section droite.

ζ : un paramètre définissant le déplacement vertical de la section normale qui contient Q à l'instant t .

$\overrightarrow{a_i}(Q)$: représentent des opérations vectorielles linéaires agissant sur ζ et dépendant de Q_o .

$\overrightarrow{a_i}(Q,t)$: représentent des déplacements secondaires assurant la compatibilité des déformations et qu'on peut généralement négliger.

Dans la flexion plane d'une poutre droite, ζ désigne la flèche de la déformée moyenne au point d'abscisse x, le déplacement dominant du point $Q(X,Y,Z)$ est $U_I = \zeta$ $U_2 = -\nu^* y \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ $U_3 = -\nu^* z \frac{\partial \zeta}{\partial x}$

ou ν^* : le coefficient de POISSON $\nu^* = \nu$ si le matériau est élastique
$\nu^* = \frac{I}{2}$ si le matériau est plastique.

Dans la suite, nous décomposons le tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ au point Q en partie sphérique et déviateur :

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{I-2\nu^*}{3} z \zeta''_{(x)} \underline{I} + \sqrt{-\frac{2}{3}} (I+\nu^*) \left| z\zeta''_{(x)} \right| \underline{A}$$

$$= \varepsilon_m \underline{I} + e \underline{A}$$

e : module du déviateur $(e = \sqrt{e_{ij} \cdot e_{ji}})$.

$\underline{A}$: déviateur unitaire qui dépend de la position de la lamelle et du point Q et qui est commun aux deux déformations élastique et plastique.

$$\underline{\varepsilon}^e = \varepsilon_m^e \underline{I} + e^e \underline{A}$$

$$\underline{\varepsilon}^p = \varepsilon_m^p \underline{I} + e^p \underline{A}$$

soit $\gamma = \left| \frac{\varepsilon_m}{e} \right| = \frac{\underline{I}}{\sqrt{6}} \frac{\underline{I} - 2\nu^*}{\underline{I} + \nu^*}$ rapport qui est indépendant de x.

III. HYPOTHESE DU FLUAGE LOCALISE :

La théorie exposée ici repose sur un certain nombre d'hypothèses les unes imposées, les autres supposées réalisées par le matériau.

H_1 - Nous supposerons que les déformations restant petites, le changement de forme dominant de chaque élément reste affine à un changement-type, soit :

$$\underline{A} = \text{constante}$$

H_2 - La structure subit un changement progressif à température constante sans retour en arrière soit :

$$T = \text{constante} \qquad \dot{e} > o$$

H_3 - La structure reste lamellaire et la direction du déplacement dominant ne change pas.

H_4 - Les sections droites sont supposées demeurer planes pendant la déformation.

H_5 - Le fluage est localisé dans un ou plusieurs tronçons très petits appelés "charnières élasto-plastiques".

H_6 - La déformation de la structure est caractérisée par un paramètre dominant, qui est dans le cas de la flexion plane, la flèche $f(x)$ des points de la ligne moyenne.

H_7 - La déformation de la ligne moyenne résulte de la superposition de deux déformations

$$f(x) = f^e(x) + f^p(x) \quad \text{hypothèse de partition.}$$

Considérons une structure de longueur $L_{(A,B)}$ soumise à un moment de flexion variable dont la plus grande valeur se localise sur une petite longueur (Fig.4). Les premières sections plastifiées sous l'accroissement de la charge seront les sections $S_{(x)}$ avec la condition $x_A \leqslant x \leqslant x_{A+}$ Proposons nous alors de déterminer le déplacement dominant $_{(x)}$ •

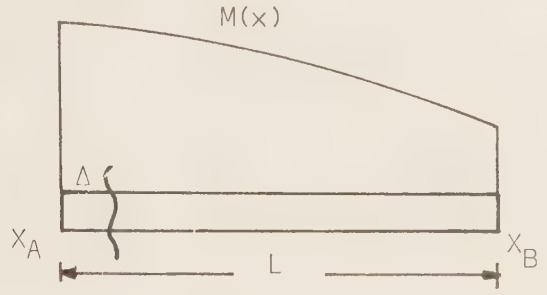


FIGURE IV.

DEFORMATION ELASTIQUE :

Calculable par les lois de l'élasticité à laquelle on se reportera éventuellement, nous nous limiterons au cas où un état entièrement élastique de la structure est suffisamment bien décrit à partir d'une seule déformée moyenne, normée, ne dépendant que de x, nous écrirons ce déplacement sous la forme suivante

$$f^e_{(x)} = L\, f(-\frac{x}{L}-)\, q_o \qquad X_A < X < X_B$$

expression dans laquelle :

L : longueur de référence caractérisant l'étendue de la structure.

$f(-\frac{x}{L}-)$: déformée de référence, sans dimension, qui vérifie les conditions aux limites.

q_o : paramètre de déformation élastique croissant en même temps que la charge.

DEFORMATION ELASTO-PLASTIQUE :

Si la limite élastique est dépassée en certains points, nous admettons que la déformation plastique est localisée au voisinage de la ou des sections les plus exposées X_j . Ce voisinage constituera une charnière élasto-plastique occupant un petit tronçon $\Delta_j = p_j L$ de la poutre (J = 1, 2, 3 ...). D'une façon précise, nous considérons p_j comme assez petit pour que les termes en p_j^m , $(m \geqslant 2)$, puissent être négligés dans les calculs, ainsi que

les termes en $p_j^m \circ p_j^{m'}$, $(m+m' \geqslant 2)$; la déformée moyenne de la charnière sera alors assimilable à un arc de parabole, d'où le nom de "charnière parabolique".

Quand la structure entre dans le domaine plastique au voisinage d'une ou plusieurs sections X_2, X_3 ..., nous représentons $\zeta_{(x)}$ par :

$$\zeta_{(x)} = \zeta^e(x) + \zeta^p(x)$$
$$= L\left[f(U)q_o + \sum g_j(U)\, p_j \left(\frac{d^2f}{dU^2}\right)_{U=U_j} (q_j - q_o)\right]$$

avec

$$U = \frac{x}{L} \qquad U_j = \frac{x_j}{L} \qquad j = 1,2,3,\ldots.$$

$\left(\frac{d^2f}{dU^2}\right)_{U=U_j} (q_j - q_o)$ représente le taux de participation de la déformée de référence $L\, g_j(U)$ à la déformation totale.

$g_j(U)$ est défini de la façon souivante :

pour $|U-U_j| \geqslant p_j$ $\qquad g_j(U) = \frac{1}{2p_j}(U-U_j) + AU + B$

(A,B : constantes respectant des conditons d'appui éventuelles en X_j ou provisoirement indéterminées).

Hors de cet intervalle $L\, g_j(U)$ est la déformée élastique de la poutre sans charge ($M_{(x)} = 0$), conservant ses appuis et se raccordant pour $|U - U_j| = p_j$ avec la partie précédente pour A et B convenablement choisis.

q_j est le paramètre de charnière en X_j . A l'approximation indiquée, il définit à lui seul, la déformation de la charnière (il est proportionnel à la courbure de la parabole en X_j).
Autrement dit, dans une section donnée :
- s'il n'y a pas de fluage "c'est-à-dire pas de production de déformation plastique, le déplacement n'est fonction que de q_o et $q_j = q_o$.
- s'il y a fluage, le déplacement n'est fonction que de q_j.

Dans ces conditions, en désignant par V_m le maximum de q_o ou la valeur minimum de q_j pour lesquelles les points les plus exposés commencent à fluer, on peut écrire :

$$q_o \geqslant V_m \geqslant q_j$$

ce qui revient à dire que lorsqu'il y a fluage, le paramètre q_j se décompose en ;

q_o pour lequel tous les éléments se déforment élastiquement, et $q_j - q_o$ pour lequel certains éléments se déforment aussi plastiquement.

IV. CHOIX DES EMPLACEMENTS DES CHARNIERES :

Dans cette méthode, nous serons amenés à rechercher la position de formation possible de charnières plastiques. Ce sont les sections où $M > M_{el}$ "M_{el} : le plus grand moment fléchissant que peut supporter la poutre en régime élastique" donc le choix des emplacements des charnières est lié à l'étude du diagramme des moments, par conséquent, ce sont (Fig. 5) :

1 - Les points d'application de charges concentrées.
2 - Les points d'effort tranchant nul (dans le cas de charges réparties).
3 - Les points de brisure (cas d'une équerre).
4 - Les points de changement de sections.
5 - Les points d'appuis encastrés.

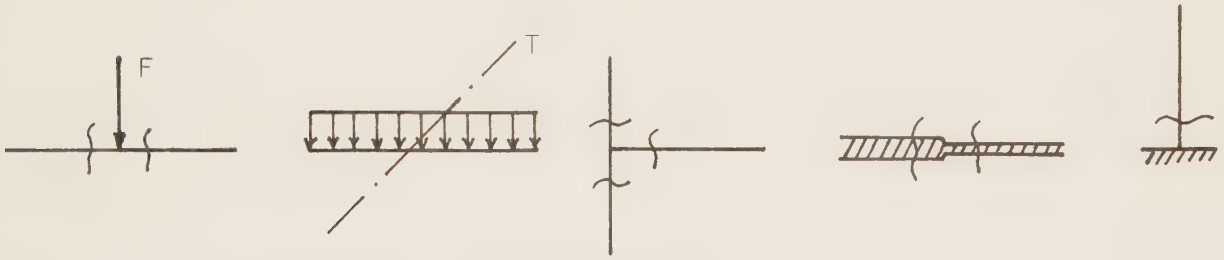


FIGURE V.

Considérons tout d'abord , le cas d'une structure isostatique, formée de poutres à inertie constante et soumise uniquement à des charges concentrées, nous placerons les charnières plastiques aux points d'application des charges ou aux extrémités des barres suivant la forme de la structure (Fig.6)

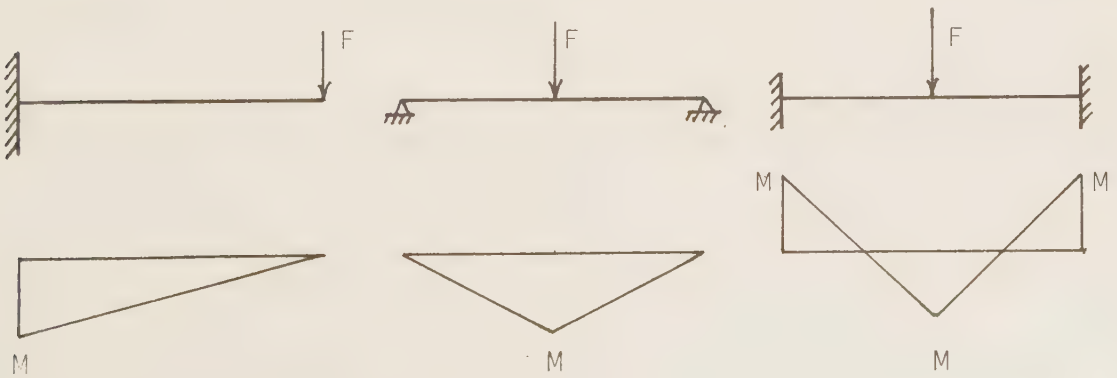


FIGURE VI.

Tandis que, pour une structure de degré d'hyperstaticité (h) dans laquelle il y a (n) charnières plastiques, nous les placerons successivement suivant le diagramme du moment fléchissant en conservant les positions précédentes. Prenons comme exemple de charpente métallique, un ensemble de poutres reliées entre elles par des équerres considérées comme indéformables, tel que le portique de la Fig. 7. Le seul mouvement d'ensemble possible est une rotation des équerres, nous avons la configuration, déjà introduite, de poutres encastrées ; il est donc légitime de supposer l'existence de charnières plastiques en chaque endroit où une poutre se raccorde à une équerre.

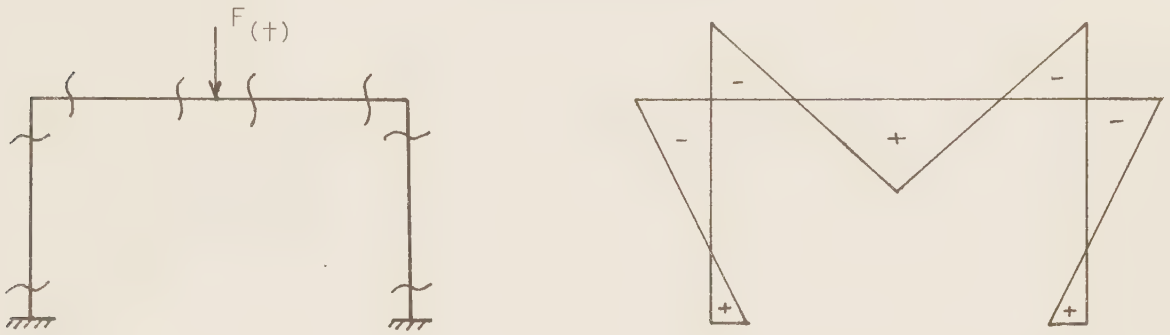


DIAGRAMME DES MOMENTS

FIGURE VII.

Si les poutres adjacentes ont même moment d'inertie, nous parlerons d'équerre élasto-plastique simple ; dans le cas contraitre, nous aurons une équerre élasto-plastique double.

V. LOI DE COMPORTEMENT DU MATERIAU HETERO-PLASTIQUE*:

Nous avons appelé matériau "hétéro-plastique", un matériau composé de micro-éléments ayant, en traction simple, des limites élastiques différentes dans la direction de la sollicitation. Un micro-élément (d'indice i) est "homoplastique", c'est-à-dire qu'il est éventuellement composé d'éléments plus petits ayant tous la même limite élastique ε_{Mi} . A l'échelle macroscopique, le matériau apparaît comme homogène et isotrope.

Il nous faut chercher une relation simple entre la contrainte σ , la déformation ε et la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ qui rend compte aussi exactement que possible des résultats expérimentaux.

* Ce qui suit est le résumé de ce qui est détaillé dans l'annexe 1.

Considérons une éprouvette d'un tel matériau et faisons lui subir un essai de traction classique à vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ constante . Quand la déformation ε franchit la valeur ε_{Mi} , la contrainte σ_i que supporte un micro-élément d'indice i change d'expression (Fig. 8)

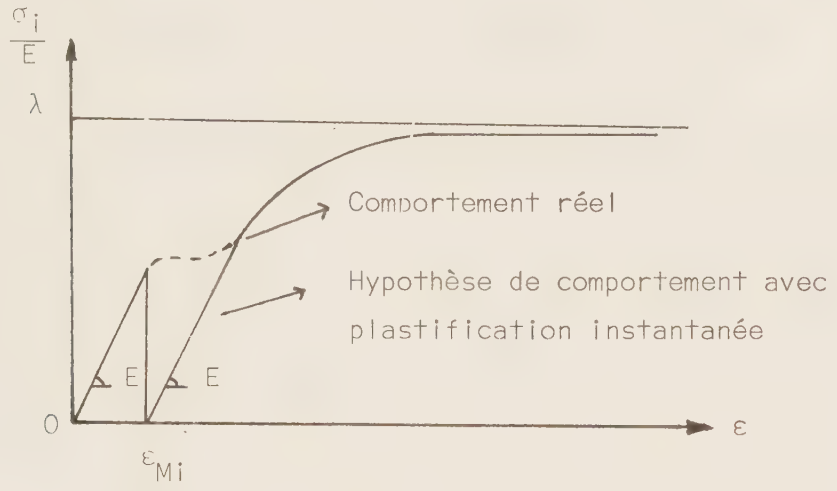


FIGURE VIII.

Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_{Mi}$ $\quad \sigma_i = E\varepsilon$ Loi de HOOKE

La loi de l'élasticité linéaire est vérifiée , avec E module d'YOUNG constant pour une température donnée.

Pour $\varepsilon \geq \varepsilon_{Mi}$ $\quad \sigma_i = E\,(\tau\,\dot{\varepsilon}_i^p)^{1/n}$ Loi de BAYLE-NORTON.

Les valeurs τ et n , sont des constantes spécifiques du matériau pour une température donnée, pouvant être approximativement déterminées à partir d'expériences de relaxation, et $\varepsilon_i^p = \varepsilon - \frac{\sigma_i}{E}$ désigne la déformation plastique qui passe instantanément de la valeur zéro à la valeur ε_{Mi} (dans un matériau métallique, cette plastification "instantanée" peut être interprétée comme correspondant au décrochement d'une file de dislocations).

Appelons taux de plastification le rapport dans un élément de volume, du nombre de micro-éléments plastifiés ($\varepsilon_{Mi} \leq \varepsilon$) au nombre total de micro-éléments. Ce taux, qui dépend à priori, de ε et de $\dot{\varepsilon}$ sera noté $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$. Nous le considérons comme spécifique du matériau, du traitement qu'il a subi avant l'essai et de la température. On établit facilement la formule suivante :

$$K(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \left[1 - \theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})\right]\varepsilon + \int_0^{\varepsilon} \gamma\left\{\frac{\varepsilon-u}{\lambda(\dot{\varepsilon})}\ ,\ n\right\}\theta(u,\dot{\varepsilon})\,du \qquad (2\text{-I})$$

ou $k = \frac{\sigma}{E}$, σ étant la contrainte macroscopique.

$$\lambda = (\tau \dot{\varepsilon})^{1/n}$$

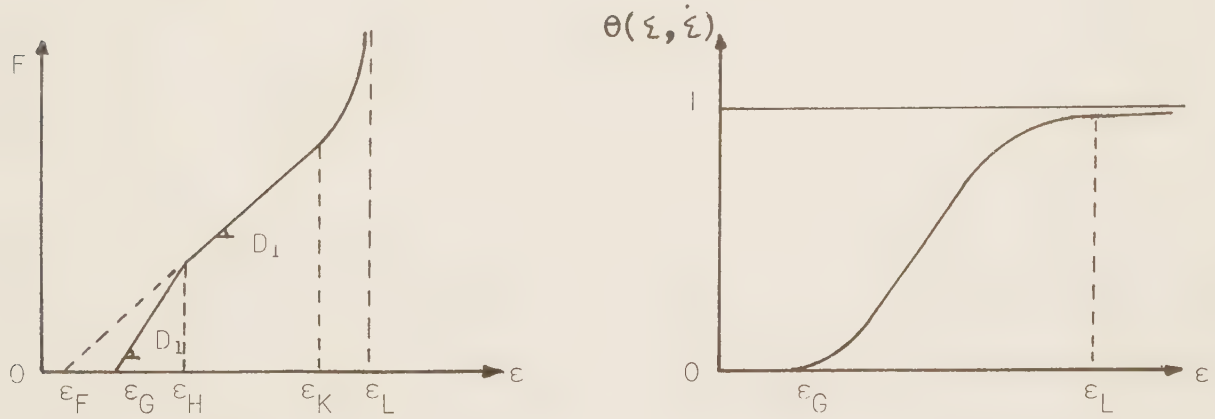
u représente la valeur courante de ε_{Mi}

$\eta(x,n)$: est une fonction numérique tabulée dans $(0,+\infty)$ et définie par

$$\eta(x,n) = I - \left[Z(x,n)\right]^n \qquad x(Z) = \int_0^n \frac{dz}{I-z^n} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant z \leqslant I$$

elle joue le rôle d'une "mémoire" du matériau.

Connaissant $K(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ pour une série de valeurs de $\dot{\varepsilon}$,ainsi que les constantes τ et n, on en déduit, en résolvant (2-1), le taux de plastification $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ on constate que θ est bien, comme il doit être, une fonction de ε monotone par morceaux, nulle dans le domaine élastique et ne dépassant pas 1 (dans le cas de l'AU4G, matériau peu consolidable, θ atteint 1 pour une valeur finie de ε) (Fig. 9a).



FIGURES IX.

L'allure de la courbe $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, évoque une loi statistique se rapprochant de la loi normale de RAYLEIGH. On peut, en effet mettre $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ sous la forme d'une fonction de distribution :

$$\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_G \\ I - e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_G)^2}{2D_I^2}} & \varepsilon_G \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_H \\ I - e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_H)^2}{2D_{II}^2}} & \varepsilon_H \leqslant \varepsilon < \varepsilon_K \end{cases} \qquad (3\text{-}I)$$

où ε_G est la limite élastique, ε_H, ε_K, D_1, D_2 : des constantes spécifiques du matériau et dépendant faiblement de $\dot{\varepsilon}$, obtenues en assimilant l'expression $F = \sqrt{-2 \ln \left[1-\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})\right]}$ à une fonction de ε linéaire par morceaux (ici deux)* (Fig.9b)
On constate ici encore que θ dépend peu de $\dot{\varepsilon}$ alors que σ en dépend beaucoup dès que $\dot{\varepsilon}$ est petit. Comme on se propose d'étudier des problèmes d'équilibre, on a besoin de $\theta(\varepsilon,0) = \theta_0(\varepsilon)$. On l'obtient par extrapolation en considérant $\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon}$ comme une fonction régulière de θ quand $\dot{\varepsilon}$ tend vers zéro, ε étant fixé.

Faisons tendre $\dot{\varepsilon}$ vers zéro dans (2-1), il vient :

$$K(\varepsilon,0) = \left[1 - \theta_0(\varepsilon)\right]\varepsilon$$

d'où l'on déduit la courbe $\sigma(\varepsilon, 0)$ (Fig.10).

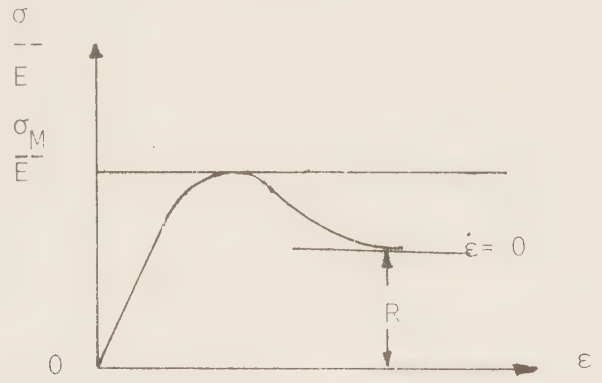


FIGURE X

L'idée de base consiste à attribuer, en statique, une résistance nulle aux micro-éléments plastifiés, la plastification résultant d'une distribution statistique des limites élastiques dans chaque élément de volume de la structure. Cette distribution est spécifique du matériau et se détermine à partir d'essais de traction à vitesse de déformation constante.
Si, dans une éprouvette de traction supportant une charge P, σ dépasse σ_M, (Fig.10), l'équilibre n'est plus possible : il y a ruine. Pour $\sigma = \tilde{\sigma}_M$ l'équilibre est instable. Une très légère impulsion provoque l'évolution vers le fluage établi sous la contrainte $\tilde{\sigma}_M$. Si dans (2-1), nous faisons tendre ε vers $+\infty$ (opération à interpréter comme attribuant en pratique à ε des valeurs relativement grandes, toutefois, non excessives et accessibles sans rupture *) il vient :

$$K(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) \simeq R + \lambda = R + (\tau\dot{\varepsilon})^{1/n}$$

* Les caractéristiques du matériau utilisé se trouvent explicitées dans l'annexe 2.

* Noter que ε est la déformation rationnelle $\ln \frac{l}{l_0}$ de l'éprouvette qu'on peut confondre avec $\frac{l}{l_0} - 1$ quand ε est petit.

En désignant par R la limite de $\left[I - \theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})\right]\varepsilon$ nécessairement inférieure (ou égale) à $\frac{\sigma_M}{E}$

Proche de la ruine de l'éprouvette, la vitesse tend, par suite, vers la valeur

$$\dot{\varepsilon}_M = \frac{I}{\tau} \left(\frac{\sigma_M}{E} - R \right)^n \qquad (4\text{-}I)$$

R, étant en général inconnu, nous conviendrons de prendre R = 0, ce qui majorera $\dot{\varepsilon}_M$ et nous placera du côté de la sécurité, une vitesse plus faible entraînant la ruine à plus longue échéance.

Il est à noter que le fluage asymptotique est théoriquement possible pour des valeurs de $\frac{\sigma}{E}$ comprises entre R et $\frac{\sigma_M}{E}$ (Fig. 10). Toutefois, ce mécanisme de ruine ne peut pas être atteint sous la contrainte constante σ à partir de l'état non chargé. Car, en faisant croître ε à partir de zéro, on rencontre d'abord un équilibre stable. Nous conviendrons donc d'exclure cette possibilité d'où la conclusion suivante :

il y a incompatibilité en traction simple entre le fluage asymptotique et l'équilibre sauf à la frontière commune , σ_M , entre ces deux états où le premier est stable et le second instable.

APPLICATION A LA FLEXION PLANE :

Nous nous proposons ici de montrer comment la connaissance de la fonction $\theta(\varepsilon)$ établie dans le cas de la traction simple, permet de résoudre les problèmes de déformation et de résistance d'une poutre constituée d'un matériau hétéroplastique.

Considérons une section droite "l'ensemble des points Q associés par (1-1)", on peut en application du critère de VON MISES, dire que la plastification apparait partout où le module du déviateur de la déformation atteint une certaine valeur e_m.

En désignant par Q^* l'un des points les plus exposés au fluage de la section (points qui commencent à fluer en même temps), on peut écrire :

$$e(Q) = e(\dot{Q})\mu \qquad (5\text{-}I)$$

μ : une variable qui détermine la distribution des déformations dans une même section, on aura toujours $0 \leqslant \mu \leqslant I$

$\mu = 0$: la déformation est nulle $e(Q) = 0$, par conséquent, le point Q se trouve sur l'axe neutre.

$\mu = 1$: il vient $e(Q) = e(Q^*)$, et par conséquent, le point Q se trouve confondu avec l'un des points les plus sollicités $Q = Q^*$

Introduisons dans la charnière J, une nouvelle variable que nous définirons par la relation : $\chi = \mu . q_j$ (6-I)

Il est intéressant de noter, qu'en fait, χ correspond à ε dans le cas de la traction simple au point Q^* , par cette analogie, il est possible d'utiliser une nouvelle fonction K^* de même forme que la fonction K :

$$K^*(\chi,\dot{\chi}) = \left[I - \theta^*(\chi,\dot{\chi}) \right] \chi + \int_0^{\chi} \gamma^*(\chi,u)\ \theta^*(u,0)\ du$$

$u \equiv \chi_{Mi}$ correspond au seuil de déformation plastique.

$\gamma^*(\chi,u) = \gamma^*\left\{\frac{\chi-u}{\lambda^*}, n\right\}$ une fonction dépendant du matériau et du mode de déformation avec ;

$$\lambda^* = (\tau^* \dot{\chi})^{1/n} \qquad \tau^* = \tau \left(\frac{\partial e(Q^*)}{\partial q_j}\right)^{I-n}$$

On démontre que, dans le cas particulier de l'équilibre statique (vitesse de déformation nulle $\dot{\chi} = 0$) l'intégrale s'annule ; la fonction K^* s'écrit alors :

$$K^*(\chi) = \left[I - \theta^*(\chi,0) \right] \chi$$

Pour relier la fonction de mémoire $\theta^*(\chi,\dot{\chi})$ à $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, nous avons dans le cas de la flexion plane :

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{I}{I+\nu}\ e$$

Des expressions (5-I),(6-I)et(7-I) ε_{11} s'écrit

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{I}{I+\nu}\ \frac{e(Q^*)}{q_j}\ \chi \quad (8\text{-}I)$$

et la fonction θ s'écrit en conséquence : $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \theta\left\{ \frac{\frac{\partial e(Q^*)}{\partial q_j}}{\frac{2}{3}(I+\nu)}\ \chi\ ,\ \frac{\frac{\partial e(Q^*)}{\partial q_j}}{\frac{2}{3}(I+\nu)}\ \dot{\chi} \right\} \equiv \theta^*(\chi,\dot{\chi})$

VI. LA METHODE GENERALE D'ETUDE :

En choisissant les charnières plastiques d'un comportement k $(k = I,2,3,\ldots)$, nous pouvons calculer la charge extérieure F_k en appliquant l'équation de LAGRANGE du travail virtuel $\delta\mathcal{T}_{Fex} = \delta\mathcal{T}_{Fin}$. Sous cette charge F_k le comportement (k) est "admissible", certains comportements correspondant à des mécanismes

de ruine partielle ou totale lorsque la force correspondante ne peut être dépassée.

Le nombre de comportements possibles croît rapidement lorsque le nombre des charnières plastiques augmente. D'où la marche à suivre :

- 1. Noter toutes les charnières plastiques "possibles",
- 2. Enumérer tous les comportements possibles de la structure en fonction de l'état des différentes charnières : élastique, élasto-plastique, en fluage asymptotique.
- 3. Ecrire, dans chaque cas, les conditions d'équilibre (statique ou dynamique) comprenant , équations de LAGRANGE, conditions aux frontières élastiques, inégalités complémentaires.
- 4. Déterminer, dans chaque cas, l'intervalle dans lequel doit se trouver la charge F_k pour que le comportement correspondant soit admissible.
- 5. Confronter les résultats de l'étage 4 et en déduire, pour chaque valeur de le (ou les) comportement (s) prévisible (s) de la structure.
- 6. En déduire notamment les valeurs de F correspondant à des ruines partielles ou a la ruine totale.

On peut noter qu'à l'étape 3, le passage d'un cas à l'autre revient à remplacer certaines égalités par des inégalités et inversement, le nombre total de conditions reste le même.

VII. EQUATIONS D'EQUILIBRE :

Pour écrire les équations d'équilibre par la méthode de LAGRANGE, nous devons calculer le travail virtuel des forces intérieures et extérieures à la structure pour une déformation virtuelle quelconque due à la flexion.

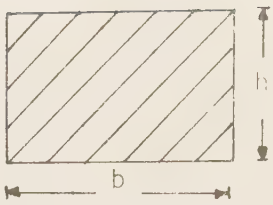
Si L_e est une partie de la structure qui reste élastique, le travail virtuel dans L_e est :

$$\delta \mathcal{Z}_{Le} = EI \int_{Le} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) dx$$

EI : étant le module de flexion.

Le travail des forces intérieures à la charnière Xj (forces élastiques et élasto-plastiques) pour une poutre de section rectangulaire (Fig. 11) a pour expression :

$$\delta Z_{p_j L} = -3 \frac{EI}{L^3} \frac{\partial^3 \zeta(x_j)}{\partial u^2 \partial q_j} \int_0^1 K^*(\mu q_j)\, \mu d\mu\, p_j\, \delta q_j$$



avec

$$K(\mu q_j) = \left[I - \theta\left(\frac{h}{2L^2} \left| \frac{\partial^3 \zeta(x_j)}{\partial u^2 \partial q_j} \right| \mu q_j \right] \mu q_j \qquad (9\text{-}I)$$

FIGURE XI .

Nous pouvons alors calculer le travail virtuel de toutes les forces agissant sur la structure et en déduire les conditions d'équilibre sous la charge extérieure.

Nous devons y adjoindre les conditions aux frontières élastiques exprimant que pour $u-u_j = p_j$, le (ou les) point(s) le(s) plus exposé(s) de la section considérée, comme appartenant au tronçon élastique atteigne(nt) la limite élastique soit, en posant $\frac{L}{h} \varepsilon_G = T$:

$$\frac{I}{L} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right| = 2T \qquad \text{Pour} \quad |u - u_j| = p_j$$

Ces équations se transformant en inégalités complémentaires au cas ou Pj = 0.

VIII. TRAITEMENT DES EQUATIONS D'EQUILIBRE :

Les équations d'équilibre reliant q_j à F se présentent sous la forme

$$\int_0^1 K^*(\mu q_j)\, \mu\, d\mu = f(F)$$

Nous posons

$$q_j\, J(q_j) = \int_0^1 K^*(\mu q_j)\, \mu\, d\mu \qquad \text{(Fig. I2)}$$

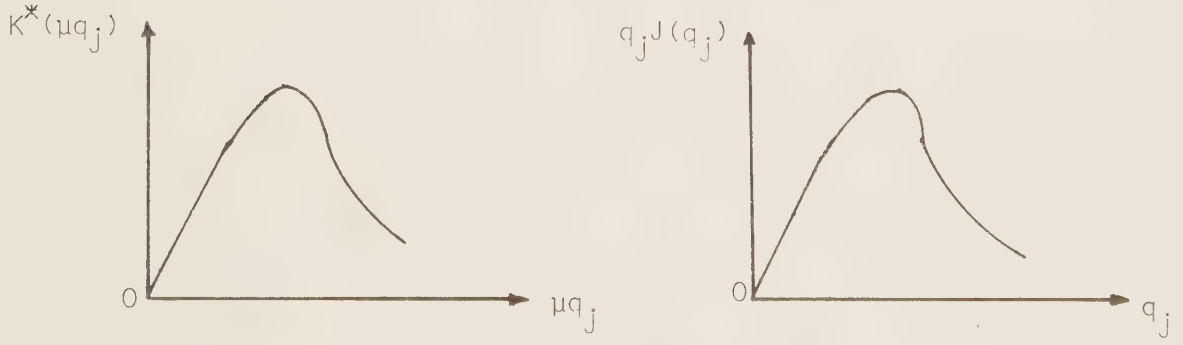


FIGURE XII.

J : étant une fonction numérique de q_j

En se référant à l'expression $K^*(\mu q_j)$ (9-I), et à l'expression approchée (3-1) de $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ on a :

$$J(q_j) = \int_0^{\frac{\varepsilon_G}{\frac{\partial e(Q)}{\partial q_j} q_j}} \mu^2 d\mu + \int_{\frac{\varepsilon_G}{\frac{\partial e(Q)}{\partial q_j} q_j}}^{\frac{\varepsilon_F}{\frac{\partial e(Q)}{\partial q_j} q_j}} e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_G)^2}{2D_1^2}} \mu^2 d\mu + \int_{\frac{\varepsilon_F}{\frac{\partial e(Q)}{\partial q_j} q_j}}^{I} e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_F)^2}{2D_2^2}} \mu^2 d\mu$$

De la relation (8-1) on remplace ε en fonction de q_j .
En faisant croître le paramètre élasto-plastique q_j à partir de zéro jusqu'à ce que l'une des inégalités cesse d'être satisfaite, nous obtenons le cas élastique partout dans la structure, charge maximale F_o de ce cas est celle de la limite élastique.

Dans le cas de l'équilibre élasto-plastique d'une structure à une charnière (analogue à une éprouvette chargée en traction simple), si nous augmentons q_j à partir de q_o , nous constatons en général que q_j $J(q_j)$ analogue à l'expression $(1-\theta_\delta)\varepsilon$ passe par un maximum pour une certaine valeur de q_j . L'équilibre n'est alors possible que pour $F \leqslant F(q_j)$ max, et fait place, pour des valeurs plus grandes de F au fluage asymptotique. La charge calculée $F(q_j)$max de ce mécanisme est celle de la ruine totale pour une structure isostatique ou ruine partielle pour une structure hyperstatique.

Dans le cas d'une structure hyperstatique à plusieurs charnières, pour $F = F(q_j)$max, l'équilibre est instable, qu'arrive-t-il ensuite ?
Notons, comme nous l'avons fait en traction, qu'il existe pour cette valeur de la charge un autre état possible ; l'évolution progressive de la charnière vers le fluage établi "fluage asymptotique" à une certaine vitesse $\dot{q}_j$ atteinte en principe pour $q_j = \infty$ (cette conclusion, contraire à la petitesse supposée de q_j, doit être interpretée physiquement, mais est pratiquement réalisée pour une valeur non excessive de la déformation plastique). C'est le seul état possible si F dépasse la valeur $F(q_j)$max, la charnière cède progressivement sous la charge constante F tant que la structure ne flue pas également en une autre charnière. Dans l'état limite, la structure est élastique et en équilibre, elle est donc "fail safe" pour cette charge qui provoque la défaillance de la charnière.

Mettons en équations l'état limite de ce mécanisme, les équations sont les mêmes qu'en statique sous réserve de remplacer l'expression statique de $K^*(\mu q_j)$ (9-I) par son expression asymptotique déduite de (2-1).

$$(\dot{\tau}_i \mu \dot{q}_j)^{1/n} + \dot{R}$$

$\dot{\tau}_i$: constante dépendant du matériau et de la géométrie de la charnière (*)

$\dot{R}$: $\lim \int_0^1 (I-\dot{\theta}(x,\dot{x}))x\mu d\mu$ constante que nous négligerons, ce qui majorera $\dot{q}_j$ et ira dans le sens de la sécurité.

Il s'en suit que $\int_0^1 (\dot{\tau}_i \mu \dot{q}_j)^{1/n} \mu d\mu = \frac{n}{2n+1} (\dot{\tau}_i \dot{q}_j)^{1/n}$

Si les inégalités sont satisfaites, ce qui montre qu'il n'y a pas de fluage, dans la structure au cours de l'évolution complète de la première charnière, la structure cède progressivement sous la charge constante F, cette charge correspond donc à une ruine partielle.

Si, dans un même domaine de valeurs de F, plusieurs mécanismes sont simultanément admissibles, les règles suivantes sont à observer :

- a) Si deux de ces mécanismes ne diffèrent que par le comportement d'une même charnière (équilibre ou fluage asymptotique), le même raisonnement et la même règle en traction peuvent s'appliquer : l'équilibre est stable et le fluage asymptotique à exclure. La conclusion est inverse à une frontière commune : équilibre instable, fluage asymptotique stable.
- b) Si deux mécanismes diffèrent par le comportement de plus d'une charnière, il y a indétermination . Il n'est pas possible de prévoir lequel des deux se produira. Toutefois, il est raisonnable, pour des raisons de sécurité, de retenir de préférencecelui qui comporte le risque de la plus grande ruine.
- c) Si, dans un certain mécanisme, on trouve que deux charnières sont en fluage asymptotique, on ne peut pas dire si les deux fluages se sont déclanchés simultanément ou l'un après l'autre. En effet, dans le second cas, l'état transitoire dans lequel l'une des charnières serait encore en équilibre tandis que l'autre serait déjà en fluage évolutif, ne peut pas être étudié par la présente méthode.

(*) Des expressions approchées de τ_j^* sont :

$\tau^* = \tau \left(\frac{2L}{3h} \right)^{n-1}$ pour les charnières d' encastrement

$\tau^* = \tau \left(\frac{4L}{h} \right)^{n-1}$ pour les autres charnières

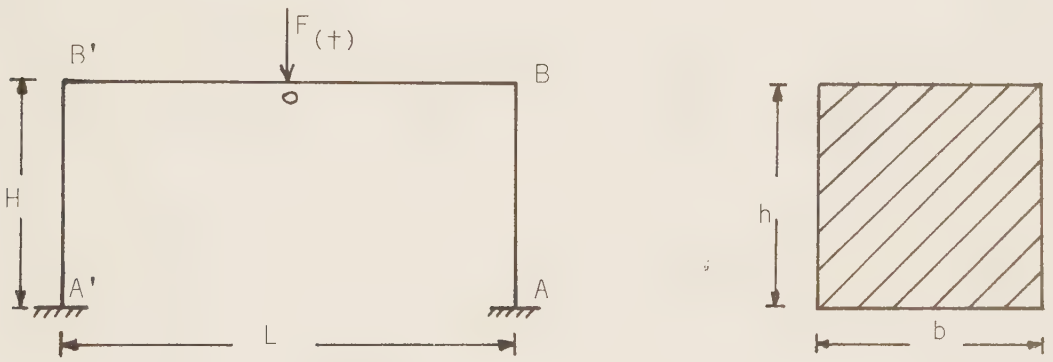
CHAPITRE II

APPLICATION A UN PORTIQUE

PREMIERE PARTIE : DEFINITION DU PORTIQUE :

I. GENERALITES :

Considérons à titre d'exemple, le portique métallique symétrique AB'OAB représenté à la (Fig. 1a) de section constante (b=h) (Fig. 1b), encastré verticalement à ses deux extrémités A et A' et sollicité en son milieu par une charge verticale F. Nous supposerons que toutes les barres de ce portique ont un module de flexion égal à **EI** .



(a) FIGURE I. (b)

Ce portique hyperstatique de degré deux, et la représentation du diagramme du moment (Fig.2a), nous donne en régime élastique en posant $\frac{H}{L} = D$

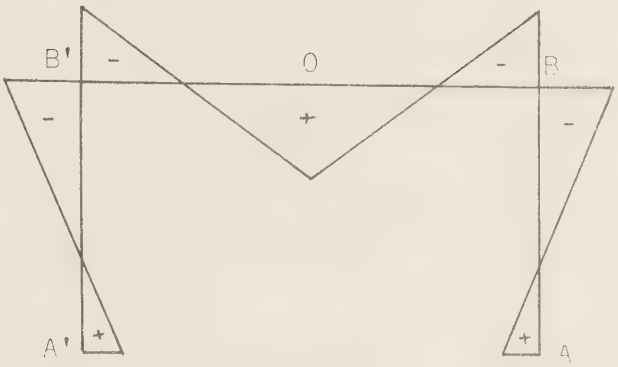
$$M_A = -\frac{FL}{8(2+D)} \qquad M_B = -\frac{FL}{4(2+D)} \qquad M_O = -\frac{FL(I+D)}{4(2+D)}$$

nous constatons que : $|M_O| > |M_B| > |M_A|$

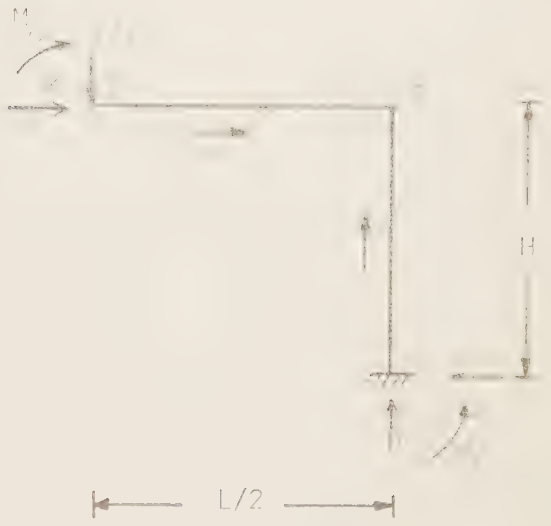
Par hypothèse nous prendrons $\frac{h}{L}$ égal à $2xI0^{-2}$ de façon à conserver le caractère lamellaire à la structure. Nous n'étudierons qu'un demi portique (Fig.2b) et prendrons comme paramètre de référence d'une section :

$U = \frac{x}{L}$ $\qquad 0 < U < \frac{I}{2}$ pour la traverse horizontale.

$V = \frac{x}{H}$ $\quad 0 < V < I$ pour le montant vertical de droite.



(a)



(b)

FIGURES II.

II. CAS ELASTIQUE :

Lorsque F ≤ Fo (Fo la force pour laquelle on dépasse la limite élastique en o), la déformation du portique est purement élastique et suffisamment bien décrite à partir de l'équation différentielle $EI\zeta'' = M_x$. La déformée élastique (Fig.3) étant caractérisée par un paramètre élastique $q_o = \frac{FL^2}{24EI}$

FIGURE III.

III. ENLACEMENT DES CHARNIERES :

Cette structure a quatre "charnières" par analogie avec ce qui a été dit au paragraphe 4-1, c'est-à-dire des charnières dans lesquelles il y a plastification possible, ces charnières se situent en :

- O, point d'application de la charge F
  charnière : de longueur Δ_1 (avec $p_I=-\frac{\Delta_1}{L}$) caractérisé par le paramètre élasto-plastique q_I .

- B, domaine qui voit le montant et la traverse s'encastrer dans l'équerre.
  charnière sur la traverse : de longueur Δ_2 (avec $p_2=-\frac{\Delta_2}{L}$), caractérisée par le paramètre élasto-plastique q_2 .
  charnière sur le montant : de longueur Δ_3 (avec $p_3=-\frac{\Delta_3}{L}$), caractérisée par le paramètre élasto-plastique. q_3 .

- A, point d'encastrement avec le bâti fixe
  charnière : de longueur Δ_4 (avec $p_4=-\frac{\Delta_4}{L}$), caractérisée par le paramètre élasto-plastique q_4 .
  soit quatre charnières pour trois rotules en O, A et B ainsi que le montre la(fig.4).

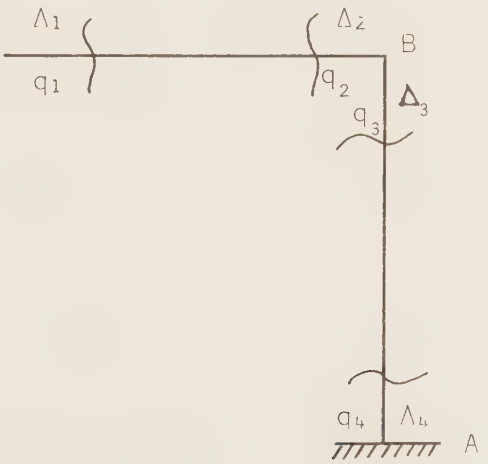


FIGURE IV.

Il nous semble utile de remarquer que l'équerre étant supposée rigide, indéformable, son seul mouvement possible est une rotation.

- Dans le cas élastique, cette rotation dépendra du seul paramètre q_o .
- Dans le cas élasto-plastique, elle dépendra de q_o et des paramètres élasto-plastiques q_I, q_2, q_3, q_4.
- Dans le cas de fluage asymptotique, nous retrouvons la notion d'appui simple.

IV. ETUDE DU COMPORTEMENT DU PORTIQUE "CHOIX DES MECANISMES"

- COMPORTEMENTS ENVISAGEABLES

Nous avons schématisé le comportement de la structure à l'aide de quatre charnières, pouvant, pour chacune d'entre elles, avoir un comportement élastique, élasto-plastique, ou de fluage asymptotique. Soit au total 81 mécanismes pour traduire toutes les éventualités.

- COMPORTEMENTS ENVISAGES :

Premièrement : en tenant compte du fait que $M_A = \frac{1}{2} M_B$, nous ferons l'hypothèse que le comportement de l'encastrement en A est toujours élastique. Pour les cas étudiés, nous vérifierons qu'il en est bien ainsi. Il ne nous reste plus alors que 27 mécanismes à définir.
Deuxièmement : le cas particulier du problème posé, se traduit par l'équilibre de l'équerre dans tous les mécanismes du portique, ce qui fait que les deux charnières se plastifient simultanément, et se déforment selon la même loi de comportement d'où l'hypothèse $q_2 = q_3$. En conséquence de quoi, il ne nous reste plus que neuf mécanismes à définir et à étudier.

Nous remarquerons d'autre part que :
- Si dans un certain mécanisme, les conditions de plasticité ($\dot{q}_j > 0$, $q_j = \infty$) sont satisfaites toutes les charnières, pour une charge donnée, constante, il y a fluage asymptotique dans toutes les charnières, il y a alors ruine totale du portique.
- Si par contre, bien qu'il y ait fluage asymptotique dans une ou plusieurs charnières, il est possible de faire croître la charge et de trouver un équilibre élasto-plastique admissible, nous aurons alors seulement ruine partielle du portique.

V. EQUATION DE LA DEFORMEE MOYENNE :

Les équations de la déformée moyenne s'écrivent en fonction de q_0, q_1, q_2, q_4
si $q_0 = \frac{FL^2}{24EI}$

$$0 < U < p_I$$

$$\frac{\zeta(u)}{L} = \left(2U^3 - 3\,\frac{I+D}{2+D}U^2 + \frac{I+2D}{4(2+D)}\right) q_o + \left(\frac{I+D}{2(2+D)} - \frac{I}{2p_I}U^2\right) \frac{6(I+D)}{2+D} p_I(q_I-q_o)$$
$$+ \left(\frac{I}{4} - U^2\right) \frac{6}{2+D}\, p_2(q_2-q_o) + \left(\frac{I}{4} - U^2\right) \frac{3D}{2+D}\, p_4(q_4-q_o)$$

$$p_I < U < \frac{I}{2} - p_2$$

$$\frac{\zeta(u)}{L} = \left(2U^3 - 3\,\frac{I+D}{2+D}U^2 + \frac{I+2D}{4(2+D)}\right) q_o + \left(2U^2 - (2+D)U + \frac{I+D}{2}\right) \frac{6(I+D)}{2+D} p_I$$
$$(q_I-q_o) + \left(\frac{I}{4} - U^2\right) \frac{6}{2+D}\, p_2(q_2-q_o) + \left(\frac{I}{4} - U^2\right) \frac{3D}{2+D}\, p_4(q_4-q_o)$$

$$\frac{I}{2} - p_2 < U < \frac{I}{2}$$

$$\frac{\zeta(u)}{L} = \left(2U^3 - 3\,\frac{I+D}{2+D}U^2 + \frac{I+2D}{4(2+D)}\right) q_o + \left(2U^2 - (2+D)U + \frac{I+D}{2}\right) \frac{6(I+D)}{2+D} p_I$$
$$(q_I-q_o) + \frac{3}{2+D}\left(U - \frac{I}{2}\right)^2 (q_2-q_o) + \left(\frac{I}{4} - U^2\right) \frac{3D}{2+D}\, p_4(q_4-q_o)$$

$$0 < V < p_4$$

$$\frac{\zeta(v)}{H} = \frac{3D}{2(2+D)}(V^2 - V^3)\, q_o + \frac{6D(I+D)}{(2+D)^2} (V^2 - V^3)\, p_I(q_I-q_o) + \frac{6D}{2+D} (V^3 - V^2)\, p_3$$
$$(q_2-q_o) + \frac{3D}{2(2+D)}\, V^2(q_4-q_o)$$

$$P_4 < V < I - p_4$$

$$\frac{\zeta(v)}{H} = \frac{3D}{2(2+D)}(V^2 - V^3)\, q_o + \frac{6D(I+D)}{(2+D)^2} (V^2 - V^3)\, p_I(q_I-q_o) + \frac{6D}{2+D} (V^3 - V^2)\, p_3$$
$$(q_2-q_o) + (V - V^2)\, \frac{3D}{2+D}\, p_4(q_4-q_o)$$

$$I - p_4 < V < I$$

$$\frac{\zeta(v)}{H} = \frac{3D}{2(2+D)}(V^2 - V^3)\, q_o + \frac{6D(I+D)}{(2+D)^2} (V^2 - V^3)\, p_I(q_I-q_o) - \frac{3D}{2+D} (I - V)^2$$
$$(q_2-q_o) + (V - V^2)\, \frac{3D}{2+D}\, p_4(q_4-q_o)$$

VI. EQUATIONS D'EQUILIBRE :

VI.1. EQUATIONS DE LAGRANGE :

La condition $\delta Z_{Fin} = \delta Z_{Fex}$ nous donne les équations de LAGRANGE

$$q_o = \left(I + \frac{6D}{I+2D} p_2 - \frac{9D}{2(2+D)(I+2D)} p_3 - \frac{3D(3+D)}{2(2+D)(I+2D)} p_4 \right) N$$

$$q_I \, J_I(q_I) = N$$

$$q_2 \, J_2(q_2) = N$$

$$\frac{I+D}{2+D} q_o + \frac{I}{2+D} q_4 \, J_4(q_4) = N$$

où l'on a posé $N = -\frac{FL^2}{24EI}$

$$J(q_j) = 3 \left\{ \int_{B_I}^{B_2} \mu^2 d\mu + \int_{B_2}^{B_3} e^{-\frac{(\xi-\xi_G)^2}{2D_1^2}} \mu^3 d\mu + \int_{B_3}^{B_4} e^{-\frac{(\xi-\xi_F)^2}{2D_2^2}} \mu^3 d\mu \right\}$$

Le calcul de cette expréssion est fait à l'aide d'un programme d'intégration dont le pas vaut 2×10^{-4} , et dont voici l'organigramme.

ORGANIGRAMME DE LA FONCTION

DONNEES

- CARACTERISTIQUE DU MATERIAU.
- PAS D'INTEGRATION = 2×10^{-4}
- PAS DU PARAMETRE $q_j = 0{,}2 \times 10^{-2}$

CALCUL DE ε

$q_j = q_o$ avec $q_o = \dfrac{\varepsilon_G}{\frac{\partial e}{\partial q_j} / \sqrt{\frac{3}{2}(I+\nu)}}$

q_j varie

$$\varepsilon = \frac{\frac{\partial e}{\partial q_j}}{\sqrt{\frac{3}{2}(I+\nu)}} q_j$$

$\varepsilon \leqslant \varepsilon_H$ | $\varepsilon < \varepsilon_H$

$B_I = 0$
$B_2 = \varepsilon_G / \varepsilon$
$B_3 = I$
$B_4 = I$
$\theta = I - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_G)^2}{2D_1^2}}$

$B_I = 0$
$B_2 = \varepsilon_G / \varepsilon$
$B_3 = \varepsilon_F / \varepsilon$
$B_4 = I$
$\theta = I - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_F)^2}{2D_2^2}}$

$s = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$
$DT_I = (B_2 - B_I)/5000$
$DT_2 = (B_3 - B_2)/5000$
$DT_3 = (B_4 - B_3)/5000$
$\mu_i = B_I + I \times DT_I \quad I = I,5000$
$z = z + \mu_i^2$
$JE = z \times DT_I$
$\mu_j = B_2 + J \times DT_2 \quad J = J,5000$
$\varepsilon = \left(\left(\frac{\partial e}{\partial q_j}\right) / \sqrt{\frac{2}{3}(I+\nu)}\right) \mu_j q_j - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_G)^2}{2D_1^2}$
$s = s + e^{\qquad \mu_j^2}$
$JP_I = s \times DT_2$
$\mu_k = B_3 + K \times DT_3 \quad K = K,5000$
$\varepsilon = \left(\left(\frac{\partial e}{\partial q_j}\right) / \frac{2}{3}(I+\nu)\right) \mu_k q_j - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_F)^2}{2D_2^2}$
$y = y + e^{\qquad \mu_k^2}$
$JP_2 = y \times DT_3$
$J(q_j) = 3(JE + JP_I + JP_2)$

VI.2. CONDITIONS AUX FRONTIERES ELASTIQUES :

Les conditions aux frontières élastiques expriment que pour $|U-U_j| = P_J$, le ou les points les plus exposés de la section considérée comme appartenant au tronçon élastique, atteignent la limite élastique, d'où les équations ci-dessous en posant $\frac{L}{h}\varepsilon_G = T$.

Si la charnière n' existe pas , ces équations sont remplacées par des inéquations dites " inégalités complémentaires " :

$$\left|\left(\frac{I+D}{2+D} - \frac{2(2+2D+D^2)}{(2+D)^2}p_I - \frac{2}{2+D}p_2 - \frac{D}{2+D}p_4\right)q_o - \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I + \frac{2}{2+D}p_2 q_2 + \frac{D}{2+D}p_4 q_4\right| = \frac{T}{3} \quad \text{pour } U = p_I$$

$$\text{si } p_I = 0 \quad \left|\left(\frac{I+D}{2+D} - \frac{2}{2+D}p_2 - \frac{D}{2+D}p_4\right)q_o + \frac{2}{2+D}p_2 q_2 + \frac{D}{2+D}p_4 q_4\right| < \frac{T}{3}$$

$$\left|\left(\frac{I}{2+D} - \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I - \frac{2(I+D)}{2+D}p_2 + \frac{D}{2+D}p_4\right)q_o + \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{2}{2+D}p_2 q_2 + \frac{D}{2+D}p_4 q_4\right| = \frac{T}{3} \quad \text{pour } U = \frac{I}{2} - p_2$$

$$\text{si } p_2 = 0 \quad \left|\left(\frac{I}{2+D} - \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I + \frac{D}{2+D}p_4\right)q_o + \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{D}{2+D}p_4 q_4\right| < \frac{T}{3}$$

$$\left|\left(\frac{I}{2(2+D)} - \frac{2(I+D)}{(2+D)^2}p_I + \frac{2}{2+D}p_3 - \frac{I}{2(2+D)}p_4\right)q_o + \frac{2(2+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{2}{2+D}p_3 q_2 - \frac{I}{2+D}p_4 q_4\right| = \frac{T}{3} \quad \text{pour } V = p_4$$

$$\text{si } p_4 = 0 \quad \left|\left(\frac{I}{2(2+D)} - \frac{2(I+D)}{(2+D)^2}p_I + \frac{2}{2+D}p_3\right)q_o + \frac{2(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{2}{2+D}p_3 q_2\right| < \frac{T}{3}$$

$$\left|\left(\frac{I}{2+D} - \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I + \frac{5}{2(2+D)}p_3 - \frac{I}{2+D}p_4\right)q_o + \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{4}{2+D}p_3 q_2 + \frac{I}{2+D}p_4 q_4\right| = \frac{T}{3} \quad \text{pour } V = I - p_3$$

$$\text{si } p_3 = 0 \quad \left|\left(\frac{I}{2+D} - \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I + \frac{I}{2+D}p_4\right)q_o + \frac{4(I+D)}{(2+D)^2}p_I q_I - \frac{I}{2+D}p_4 q_4\right| < \frac{T}{3}$$

DEUXIEME PARTIE : DEFINITION ET ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE DANS LE CADRE DE NEUF MECANISMES.

I. EQUATIONS DU COMPORTEMENT :

Le système complet d'équations et d'inéquations dans le cas de l'équilibre :

(I) $$q_o = \left(I + \frac{6D}{G} p_2 - \frac{9CD}{2G} p_3 - \frac{3DCS}{G} p_4 \right) N$$

(2) $$q_I \, J_I(q_I) = N \quad p_I > 0 \ , \ q_I > q_o \quad \text{ou} \quad p_I = 0 \ , \ q_I = q_o$$

(3) $$q_2 \, J_2(q_2) = N \quad p_2 > 0 \ , \ p_3 > 0 \ , \ q_2 \ q_o \quad \text{ou} \quad P_2 = p_3 = 0 \ , \ q_2 = q_o$$

(4) $$Aq_o + Cq_4 \, J_4(q_4) = N \quad p_4 > 0 \ , \ q_4 > q_o \quad \text{ou} \quad p_4 = 0 \ , \ q_4 = q_o$$

(5) $$\left| (A - 2Bp_I - 2Cp_2 - DCp_4)q_o - 4ACp_I q_I + 2Cp_2 q_2 + DCp_4 q_4 \right| = \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_I > 0$$

ou $$\left| (A - 2Cp_2 - DCp_4)q_o + 2Cp_2 q_2 + DCp_4 q_4 \right| < \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_I = 0$$

(6) $$\left| (C - 4ACp_I - 2Ap_2 + DCp_4)q_o + 4ACp_I q_I - 2Cp_2 q_2 - DCp_4 q_4 \right| = \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_2 > 0$$

ou $$\left| (C - 4ACp_I + DCp_4)q_o + 4ACp_I q_I - DCp_4 q_4 \right| < \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_2 = 0$$

(7) $$\left| (\frac{C}{2} - 2ACp_I + 2Cp_3 - \frac{C}{2} p_4)q_o + 2ACp_I q_I - 2Cp_3 q_2 - Cp_4 q_4 \right| = \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_4 > 0$$

ou $$\left| (\frac{C}{2} - 2ACp_I + 2Cp_3)q_o + 2ACp_I q_I - 2Cp_3 q_2 \right| < \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_4 = 0$$

(8) $$\left| (C - 4ACp_I + Ep_3 - Cp_4)q_o + 4ACp_I q_I - 4Cp_3 q_2 + Cp_4 q_4 \right| = \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_3 > 0$$

ou $$\left| (C - 4ACp_I + Ep_3)q_o + 4ACp_I q_I - 4Cp_3 q_2 \right| < \frac{T}{3} \quad \text{si} \quad p_3 = 0$$

En posant pour simplifier l'écriture :

$$A = \frac{I+D}{2+D} \qquad B = \frac{2+2D+D}{(2+D)} \qquad C = \frac{I}{2+D}$$

$$E = \frac{5}{2(2+D)} \qquad G = I+2D \qquad S = 3+D$$

Soit huit équations pour huit inconnues q_o, q_I, q_2, q_4, p_I, p_2, p_3, p_4. la flèche au milieu du portique est ensuite donnée par

$$\frac{\zeta(0)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + 3A^2 p_I(q_I - q_o) + \frac{3}{2} Cp_2(q_2 - q_o)$$

et la rotation de l'équerre par

$$\zeta'_{(u=I/2)} = \zeta'_{(v=I)} = -\frac{3}{2}DCq_o - 6DACp_I(q_I - q_o)$$

II. ENONCE DES DIFFERENTS MECANISMES :

La méthode de calcul consiste à envisager les possibilités indépendamment les unes des autres, et à chercher leurs conditions de validité respectives :

	CHARNIERE A	CHAPNIERES B	CHARNIERES O
1	ELASTIQUE	ELASTIQUE	ELASTIQUE
2			ELASTO-PLASTIQUE
3			FLUAGE-ASYMPTOTIQUE
4		ELASTO-PLASTIQUE	ELASTIQUE
5			ELASTO-PLASTIQUE
6			FLUAGE-ASYMPTOTIQUE
7		FLUAGE-ASYMPTOTIQUE	ELASTIQUE
8			ELASTO-PLASTIQUE
9			FLUAGE-ASYMPTOTIQUE

Nous étudierons les divers comportements en O et B en considérant que le comportement en A reste toujours élastique, ce que nous vérifierons chaque fois.

II.1. EQUILIBRE SOUS COMPORTEMENT ELASTIQUE :

Par hypothèse $q_I=q_2=q_o$ $\qquad p_I=p_2=p_3=0$

le système devient : $q_o = N$

$q_o \leqslant -\frac{T}{3A}$

avec $\frac{\zeta(o)}{L} = \frac{GC}{4} q_o \qquad \zeta'_{(v=I)} = \zeta'_{(u=I/2)} = -\frac{3}{2}DCq_o$

cet équilibre subsiste jusqu'à ce que $N = \frac{T}{3A}$, ce qui à la limite donne le tableau suivant :

D	$q_o = N$	$\zeta_{(o)}/L$	ζ'
0	0,11	$0,1375 \times 10^{-1}$	0
0,1	0,105	$0,15 \times 10^{-1}$	$-0,786 \times 10^{-2}$
0,2	0,1008	$0,1604 \times 10^{-1}$	$-0,1375 \times 10^{-1}$
0,3	0,0973	$0,1692 \times 10^{-1}$	$-0,1904 \times 10^{-1}$
0,4	0,0943	$0,1768 \times 10^{-1}$	$-0,2358 \times 10^{-1}$
0,5	0,0917	$0,1834 \times 10^{-1}$	$-0,2751 \times 10^{-1}$
0,625	0,0888	$0,1903 \times 10^{-1}$	$-0,3171 \times 10^{-1}$
0,7	0,0874	$0,1942 \times 10^{-1}$	$-0,3399 \times 10^{-1}$
0,8	0,0856	$0,1987 \times 10^{-1}$	$-0,3669 \times 10^{-1}$
0,9	0,084	$0,2028 \times 10^{-1}$	$-0,391 \times 10^{-1}$
1	0,0825	$0,2063 \times 10^{-1}$	$-0,4125 \times 10^{-1}$
1,1	0,0812	$0,2095 \times 10^{-1}$	$-0,4322 \times 10^{-1}$
1,2	0,08	$0,2125 \times 10^{-1}$	$-0,45 \times 10^{-1}$
1,3	0,0789	$0,2152 \times 10^{-1}$	$-0,4622 \times 10^{-1}$
1,4	0,0779	$0,2177 \times 10^{-1}$	$-0,4811 \times 10^{-1}$
1,5	0,077	$0,22 \times 10^{-1}$	$-0,495 \times 10^{-1}$

Voir la courbe C_1 page 43 qui limite supérieurement les valeurs admissibles de N.

II.2. EQUILIBRE ELASTIQUE EN B, AVEC EQUILIBRE ELASTO-PLASTIQUE EN O :

Par hypothèse : $q_2 = q_o \longrightarrow p_2 = p_3 = 0$, $q_I > q_o \longrightarrow p_I > 0$

le système devient :

$$q_o = N$$

$$q_I \, J_I(q_I) = N$$

$$\left|(A - 2Bp_I)q_o - 4ACp_I q_I\right| = \frac{T}{3} \qquad \text{condition de plastification en O (3)}$$

$$\left|(C - 4ACp_I)q_o + 4ACp_I q_I\right| < \frac{T}{3} \qquad \text{condition de non plastification en B}$$

soit trois équations pour trois inconnues q_o , q_I , p_I , avec

$$\frac{\xi(o)}{L} = \frac{GC}{4} q_o + 3A^2 p_I(q_I - q_o)$$

$$\xi_{(v=I)} = \xi_{(u=I/2)} = -\frac{3}{2} DCq_o - 6DACp_I(q_I - q_o)$$

On fait croître q_I , à partir de zéro. Pour chaque valeur de q_I, on calcule N(d'où q_o) et p_I ainsi que l'expression

$$Y = \left|(C - 4ACp_I)q_o + 4ACp_I q_I\right|$$

Les frontières de ce mécanisme s'obtiennent en remplaçant l'une des inégalités par une égalité :

$q_I > q_o$ remplacé par $q_I = q_o$ entraîne $p_1 = 0$, $N = T/3A$ et redonne la courbe C_1.

$p_I > 0$ remplacé par $p_I = 0$ entraîne de même $N = T/3A$ et donne la courbe C_1

$Y < T/3$ remplacé par $Y = T/3$ permet de calculer $N(D)$ et fournit une seconde frontière C_2 (page 43) d'après le tableau suivant obtenu à l'aide d'un programme de calcul :

D	q_I	$q_o=N$	$\frac{\zeta(0)}{L}$	ζ'	p_I	ε_1	θ_1
0	0,11	0,11	$0,1375 \times 10^{-1}$	0	0	$0,33 \times 10^{-2}$	0
0,1	0,116	0,1158	$0,166 \times 10^{-1}$	$-0,083 \times 10^{-1}$	0,025	$0,365 \times 10^{-2}$	$0,148 \times 10$
0,2	0,122	0,1208	$0,193 \times 10^{-1}$	$-0,165 \times 10^{-1}$	0,045	$0,406 \times 10^{-2}$	$0,6933 \times 10$
0,3	0,132	0,1269	$0,227 \times 10^{-1}$	$-0,25 \times 10^{-1}$	0,065	$0,448 \times 10^{-2}$	0,158
0,4	0,144	0,1305	$0,26 \times 10^{-1}$	$-0,335 \times 10^{-1}$	0,077	$0,504 \times 10^{-2}$	0,266
0,5	0,158	0,1322	$0,29 \times 10^{-1}$	$-0,411 \times 10^{-1}$	0,085	$0,569 \times 10^{-2}$	0,352
0,625	0,186	0,1334	$0,339 \times 10^{-1}$	$-0,517 \times 10^{-1}$	0,086	$0,691 \times 10^{-2}$	0,514
0,7	0,186	0,1312	$0,349 \times 10^{-1}$	$-0,557 \times 10^{-1}$	0,088	$0,703 \times 10^{-2}$	0,55
0,8	0,182	0,1285	$0,356 \times 10^{-1}$	$-0,604 \times 10^{-1}$	0,09	$0,702 \times 10^{-2}$	0,529
0,9	0,178	0,126	$0,366 \times 10^{-1}$	$-0,645 \times 10^{-1}$	0,092	$0,7 \times 10^{-2}$	0,529
1	0,176	0,1239	$0,375 \times 10^{-1}$	$-0,685 \times 10^{-1}$	0,094	$0,7 \times 10^{-2}$	0,531
1,1	0,172	0,1219	$0,383 \times 10^{-1}$	$-0,720 \times 10^{-1}$	0,095	$0,699 \times 10^{-2}$	0,525
1,2	0,170	0,1201	$0,395 \times 10^{-1}$	$-0,751 \times 10^{-1}$	0,097	$0,701 \times 10^{-2}$	0,528
1,3	0,168	0,1185	$0,395 \times 10^{-1}$	$-0,781 \times 10^{-1}$	0,099	$0,703 \times 10^{-2}$	0,53
1,4	0,166	0,117	$0,4 \times 10^{-1}$	$-0,808 \times 10^{-1}$	0,1	$0,703 \times 10^{-2}$	0,53
1,5	0,164	0,1156	$0,406 \times 10^{-1}$	$-0,834 \times 10^{-1}$	0,102	$0,703 \times 10^{-2}$	0,53

Le mécanisme étudié est admissible dans le domaine limité par C_1 et C_2. Pour ces valeurs de N. on remarque que la condition de non plastification en A

$\left|\left(\frac{C}{2} - 2ACp_I\right)q_o + 4ACp_I q_I\right| < \frac{T}{3}$ est satisfaite, ce qui veut dire que le comportement en A est l'équilibre élastique.

II.3. EQUILIBRE ELASTIQUE EN B AVEC FLUAGE ASYMPTOTIQUE EN C :

Par hypothèse : $q_2 = q_o \longrightarrow p_2 = p_3 = 0$

$\dot{q}_I > 0 \longrightarrow q_I = \infty \qquad p_I = 0 \qquad p_I q_I > 0$

Le système devient :

$$q_o = N \qquad (I)$$

$$\frac{n}{2n+I} \left(\tau^*_I \dot{q}_I \right)^{I/n} = N \qquad (2)$$

$$\left| A\, q_o - 4AC\, p_I q_I \right| = \frac{T}{3} \qquad \text{condition de plastification en O} \quad (3)$$

$$\left| C\, q_o + 4AC\, p_I q_I \right| < \frac{T}{3} \qquad \text{condition de non plastification en B(4)}$$

Soit trois équations pour trois inconnues $q_o, \dot{q}_1, p_1 q_1$ avec

$$\frac{\zeta(O)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + 3A^2 p_I q_I \qquad \zeta'_{(v=I)} = \zeta'_{(u=I/2)} = -\frac{3}{2} DC\, q_o - 6DAC\, p_I q_I$$

N, étant donné, (2) fournit $\dot{q}_1 > 0$, ensuite, levant les barres de (3) par continuité, nous tirons $p_1 q_1 = \frac{3AN-T}{12AC}$ qui est > 0 pour $N > \frac{T}{3A}$ c'est-à-dire pour (N,D) au dessus de la courbe C_1.

Remplaçant q_o et $p_1 q_1$ dans la condition (4) celle-ci devient :

$$N < \frac{2T}{3(A+C)} = \frac{2T}{3}$$

Au total, ce mécanisme serait théoriquement admissible pour $\frac{1}{3A} < N < \frac{2T}{3}$.

Mais ce domaine est entièrement compris entre les courbes C_1 et C_2 qui limitent le domaine correspondant à l'équilibre élasto-plastique en O. D'après la règle (a) de la page 32 , le mécanisme est donc à exclure, sauf sur la courbe C_2, où il assure la transition avec le cas supérieur (voir page 43).

II.4. EQUILIBRE ELASTO-PLASTIQUE EN B AVEC EQUILIBRE ELASTIQUE EN O :

Par hypothèse $q_I = q_o \longrightarrow p_I = 0$

$q_2 > q_o \longrightarrow p_2 > 0 \quad , \quad p_3 > 0$

le système devient :

$$q_o = \left(I + \frac{6D}{G} p_2 - \frac{9CD}{G} p_3 \right) N \qquad (I)$$

$$q_2\, J_2(q_2) = N \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \left| (C - 2Ap_2) q_o - 2Cp_2 q_2 \right| &= \frac{T}{3} \\ \left| (A - E\, p_3) q_o - 4Cp_3 q_2 \right| &= \frac{T}{3} \end{aligned}\right\} \quad \text{condition de plastification en B} \quad (3)$$

$$\left|(A - 2Cp_2)q_o + 2Cp_2q_2\right| < \frac{T}{3}$$ condition de non plastification en O

Soit quatre équations pour quatre inconnues q_o , q_2 , p_2 , p_3 avec

$$\frac{\zeta(0)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + \frac{3}{2}Cp_2(q_2-q_o) \qquad \zeta'_{(u=I/2)} = \zeta'_{(v=I)} = -\frac{3}{2} DCq_o$$

En résolvant pour des valeurs de q_2 croissant à partir de zéro, on remarque que la condition de non plastification en O, cesse d'être satisfaite pour une valeur de $q_2 = q_o$ pour laquelle $p_2 = p_3 = 0$, l'hypothèse est donc à rejeter.

II.5 EQUILIBRE ELASTO-PLASTIQUE EN O ET B :

Par hypothèse :

$$q_I > q_o \longrightarrow p_I > 0$$

$$q_2 > q_o \longrightarrow p_2 > 0 \quad , \quad p_3 > 0$$

le système devient :

$$q_o = (I + \frac{6D}{G} p_2 - \frac{9CD}{2G} p_3) N \qquad (I)$$

$$q_I J_I(q_I) = N \qquad q_I > N \qquad (2)$$

$$q_2 J_2(q_2) = N \qquad q_2 > N \qquad (3)$$

$$\left|(A - 2Bp_I - 2Cp_2)q_o - 4ACp_Iq_I + 2Cp_2q_2 \right| = \frac{T}{3} \qquad (4)$$

$$\left|(C - 4ACp_I - 2Ap_2)q_o + 4ACp_Iq_I - 2Cp_2q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (5)$$

$$\left|(C - 4ACp_I - Ep_2) q_o + 4ACp_Iq_I - 4Cp_3q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (6)$$

soit six équations pour six inconnues q_o, q_I, q_2, p_I, p_2, p_3.
avec

$$\frac{\zeta(0)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + 3A^2 p_I(q_I-q_o) + \frac{3}{2}Cp_2(q_2-q_o)$$

$$\zeta'_{(u=I/2)} = \zeta'_{(v=I)} = -\frac{3}{2} DCq_o - 6DACp_I(q_I-q_o)$$

Pour des valeurs de q_1, croissant à partir de zéro, on calcule q_2 , et on en déduit successivement q_o, p_1, p_2, p_3 . On constate que ce mécanisme subsite jusqu'à ce que $q_1 J_1(q_1)$ passe par un maximum, mais p_2 et p_3 deviennent négatifs pour les valeurs de D supérieures à 0,625, ce qui veut dire que ce type de comportement n'est valable que pour $D \leqslant 0{,}625$.

On établit pour le maximum de $q_1 J_1(q_1)$, et donc de N le tableau suivant :

D	q_o	q_1	q_2	N	f'	p_1	p_2	p_3	ε_1	ε_2	θ_1	θ_2	$\frac{\zeta(0)}{L}$
o	0,1585	0,234	0,234	0,1634	0	0,084	0,084	0	$0,702\times10^{-2}$	$0,702\times10^{-2}$	0,529	0,529	$0,25\times10^{-}$
0,1	0,1585	0,224	0,171	0,1576	$-0,121\times10^{-1}$	0,075	0,077	0,18	$0,704\times10^{-2}$	$0,49\times10^{-2}$	0,531	0,247	$0,274\times10$
0,2	0,1517	0,214	0,1545	0,1314	$-0,221\times10^{-1}$	0,076	0,061	0,17	$0,7\times10^{-2}$	$0,42\times10^{-2}$	0,527	0,097	$0,285\times10$
0,3	0,1462	0,208	0,1465	0,1461	$-0,307\times10^{-1}$	0,075	0,045	0,13	$0,705\times10^{-2}$	$0,407\times10^{-2}$	0,533	0,072	$0,3\times10$
0,4	0,1417	0,2	0,142	0,1416	$-0,381\times10^{-1}$	0,079	0,028	0,059	$0,7\times10^{-2}$	$0,353\times10^{-2}$	0,526	0,008	$0,312\times10$
0,5	0,1376	0;196	0,138	0,1376	$-0,448\times10^{-1}$	0,083	0,017	0,057	$0,706\times10^{-2}$	$0,331\times10^{-2}$	0,533	0	$0,328\times10$
0,625	0,1334	0,190	0,1334	0,1334	$-0,52\times10^{-1}$	0,086	0,001	0,003	$0,706\times10^{-2}$	$0,33\times10^{-2}$	0,533	0	$0,342\times10$

Voir la courbe C_3 page 43

Pour ces valeurs de N, on remarque que la condition de non plastification en A $\left|\left(\frac{C}{2}-2ACp_1+2Cp_3\right)q_o+2ACp_1q_1-2Cp_3q_2\right|<\frac{T}{3}$ est satisfaite, ce qui veut dire que le comportement en A est l'équilibre élastique.

II.6. EQUILIBRE ELASTO-PLASTIQUE EN B AVEC FLUAGE ASYMPTOTIQUE EN O :

Par hypothèse : $q_2 > q_o \longrightarrow p_2 > 0 \quad , \quad p_3 > 0$

$q_I > 0 \longrightarrow q_I = \infty \qquad p_I = 0 \qquad p_I q_I > 0$

le système devient :

$$q_o = (I + \frac{6D}{G} p_2 - \frac{9CD}{2G} p_3)\, N \qquad (I)$$

$$\frac{n}{2n+I} (\tau_I^* \dot{q}_I)^{I/n} = N \qquad (2)$$

$$q_2\, J_2(q_2) = N \qquad (3)$$

$$\left|(A - 2Cp_2)q_o - 4ACp_I q_I + 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (4)$$

$$\left|(C - 2Ap_2)q_o + 4ACp_I q_I - 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (5)$$

$$\left|(C + Ep_3)q_o + 4ACp_I q_I - 4Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (6)$$

soit six équations pour six inconnues $q_o, q_I, q_2, p_2, p_3, p_I q_I$ avec

$$\frac{f(o)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + 3A^2 p_I q_I + \frac{3}{2} Cp_2 (q_2 - q_o)$$

$$f_{(u=I/2)} = f_{(v=I)} = -\frac{3}{2} DCq_o - 6DACp_I q_I$$

On en tire :

$$q_o = \frac{2T}{3} (I - 2p_2)$$

$$q_o = (I + Xp_2)\, N \quad \text{avec} \quad X = \frac{6DC}{G}(I3 + 8D)\, \frac{q_2 - q_o}{8q_2 - 5q_o} > 0 \quad \forall D$$

donc

$$p_2 = \frac{N - \frac{2T}{3}}{\frac{4T}{3} - XN}$$

Les inégalités $p_2 > 0$ et $N > \frac{2T}{3}$ font que $X < 2$, ce qui entraîne la condition

$$\frac{5 - Y(D)}{8 - Y(D)} \geqslant I \quad \text{avec} \quad Y = \frac{3DC}{G} (I3 + 8D) > 0 \qquad \forall\ D$$

ce qui fait que la condition ne peut jamais être satisfaite, l'hypothèse est donc à rejeter.

II.7. FLUAGE ASYMPTOTIQUE EN B AVEC EQUILIBRE ELASTIQUE EN O :

Par hypothèse $q_I = q_o \qquad p_I = 0$

$\dot{q}_2 > 0 \qquad q_2 = \infty \qquad p_2 = p_3 = 0 \qquad p_2 q_2 > 0 \qquad p_3 q_2 > 0$

le système devient

$$q_o = N \tag{I}$$

$$\frac{n}{2n+1} (\tau_2^* \dot{q}_2)^{1/n} = N \tag{2}$$

$$\left| A q_o + 2C p_2 q_2 \right| < \frac{T}{3}$$

$$\left| C q_o - 2C p_2 q_2 \right| = \frac{T}{3} \tag{3}$$

$$\left| C q_o - 4C p_3 q_2 \right| = \frac{T}{3} \tag{4}$$

Soit quatre équations pour quatre inconnues $q_o, q_2, p_2 q_2, p_3 q_2$, avec

$$\frac{\zeta(0)}{L} = \frac{CG}{4} q_o + \frac{3}{2} C p_2 q_2 \qquad \zeta'_{(u=I/2)} = \zeta'_{(v=I)} = -\frac{3}{2} CD\, q_o$$

En levant les barres de valeurs absolues par continuité , on tire de (3) et (4)

$$p_2 q_2 = \frac{3CN - T}{6C} > 0 \qquad \text{pour } N > \frac{T}{3C}$$

$$p_3 q_2 = \frac{3CN - T}{12C} > 0 \qquad \text{pour } N > \frac{T}{3C}$$

Partant ensuite de l'inégalité

$$N < \frac{2T}{3(A+C)} = \frac{2T}{3}$$

Mais $C = \frac{1}{2+D} < \frac{1}{2}$, d'où $\frac{T}{3C} > \frac{2T}{3}$. Il en résulte qu'aucune valeur

de N n'est possible. L'hypothèse est donc à rejeter.

II.8 FLUAGE ASYMPTOTIQUE EN B (rotule plastique en B) AVEC EQUILIBRE ELASTO-PLASTIQUE EN O :

Par hypothèse $q_I > q_o \qquad p_I > 0$

$\dot{q}_2 > 0 \qquad q_2 = \infty \qquad p_2 = p_3 = 0$, $p_2 q_2 > 0$, $p_3 q_2 > 0$

le système devient :

$$q_o = N \qquad (I)$$

$$q_I J_I(q_I) = N \qquad (2)$$

$$\frac{n}{2n+I}\,(\dot{t}_2 \dot{q}_2)^{I/n} = N \qquad (3)$$

$$\left|(A - 2Bp_I)q_o - 4ACp_I q_I + 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (4)$$

$$\left|(C - 4ACp_I)q_o + 4ACp_I q_I - 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (5)$$

$$\left|(C - 4ACp_I)q_o + 4ACp_I q_I - 4Cp_3 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (6)$$

Soit six équations pour six inconnues $q_o, q_I, q_2, p_I, p_2q_2, p_3q_2$, avec

$$\frac{\zeta(o)}{L} = \frac{CG}{4}\,q_o + 3A^2 p_I(q_I - q_o) + \frac{3}{2}\,Cp_2q_2$$

$$\zeta'_{(u=I/2)} = \zeta'_{(v=I)} = -\frac{3}{2}\,DCq_o - 6DACp_I(q_I - q_o)$$

on en tire $p_I = \dfrac{q_o - 2T/3}{(2B+4AC)q_o}$ pour $N > \dfrac{2T}{3}$

$$p_2q_2 = \frac{I}{2C}\left((Cq_o - \frac{T}{3}) + 4ACp_I(q_I - q_o)\right)$$

En remplaçant q_o et p_1 en fonction de q_1 et faisant varier q_1 à partir de zéro, on constate que P_1 et p_2q_2 sont > 0 quand D est $< 0{,}625$ et (N,D) situé au dessus de la courbe $Cq_o - \frac{T}{3} + 4ACp_I(q_I - q_o) = 0$ qui n'est autre que la courbe C_2 du cas (2-5).

Conformément à la règle (a) de la page 20 , nous devons exclure le domaine de l'équilibre élasto-plastique stabe en O et en B et n'admettre le mécanisme actuel qu'au dessus de C_3.

II.9. FLUAGE ASYMPTOTIQUE EN O ET B (rotules plastiques en O et B) :

Par hypothèse $\dot{q}_I > 0$, $q_I = \infty$, $p_I = 0$, $p_Iq_I > 0$

$\dot{q}_2 > 0$, $q_2 = \infty$, $p_2 = p_3 = 0$, $p_2q_2 > 0$, $p_3q_2 > 0$

le système devient

$$q_o = N \qquad (I)$$

$$\frac{n}{2n+I}\,(\mathcal{C}_I^{\cdot}\,\dot{q}_I)^{I/n} = N \qquad (2)$$

$$\frac{n}{2n+I}\,(\mathcal{C}_2^{\cdot}\,\dot{q}_2)^{I/n} = N \qquad (3)$$

$$\left|Aq_o - 4ACp_I q_I + 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (4)$$

$$\left|Cq_o + 4ACp_I q_I - 2Cp_2 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (5)$$

$$\left|Cq_o + 4ACp_I q_I - 4Cp_3 q_2\right| = \frac{T}{3} \qquad (6)$$

Nous avons six équations, mais seulement cinq inconnues

$$q_o \;,\; q_I \;,\; q_2 \;,\; 2Ap_I q_I - p_2 q_2 \;,\; Ap_I q_I - p_3 q_2$$

Pour que le problème admettre une solution, nous devons prendre N comme sixième inconnue, nous trouvons $N = q_o = \frac{2T}{3}$

$p_I q_I \;,\; p_2 q_2 \;,\; p_3 q_2$ sont indéterminés.

Ce mécanisme est à rejeter conformément à la règle (a) de la page 20 .

Remarquons toutefois, qu'il correspondrait à la ruine totale du portique.

Pour les valeurs de N supérieures à $\frac{2T}{3}$, la ruine totale reste une hypothèse plausible non plus en fluage établi, mais en fluage accéléré "dans les deux charnières ou dans une seule". Un tel mécanisme est hors de notre étude.

De toutes façons, conformément à la règle rappelée ci-dessus, cette hypothèse ne peut être retenue que dans un domaine de (N,D) situé au dessus des courbes C_3 et C_2.

A partir de l'hypothèse de continuité pour la variation du paramètre D, à savoir D = 0 , la traverse se comporte comme une poutre encastrée en ses extrémités et D = + ∞ , la traverse se comporte comme une poutre simplement appuyée en ses extrémités , on peut supposer qu'au dessus de C_3, pour des valeurs croissantes de N, le fluage est accéléré en B. Le comportement en O passant de l'équilibre élasto-plastique (ruine partielle) au fluage accéléré (ruine totale), tandis qu'au dessus de C_2 le fluage est accéléré en O (ruine totale), le comportement en B restant élastique au moins pour les grandes valeurs de D.

REMARQUE : L'hypothèse du comportement élasto-plastique en A, quelque soit le comportement en O et B, conduit à la courbe C_4 qui nous montre, puisque celle-

ci se trouve au dessus de toutes celles trouvées antérieurement, que l'hypothèse faite, à savoir le comportement élastique en A, est justifié.

INTERPRETATION DES RESULTATS :

Ayant reporté sur une même figure les différentes courbes C_1, C_2, C_3, C_4, il nous est possible maintenant, suivant les valeurs du paramètre D de préciser le comportement de la structure.

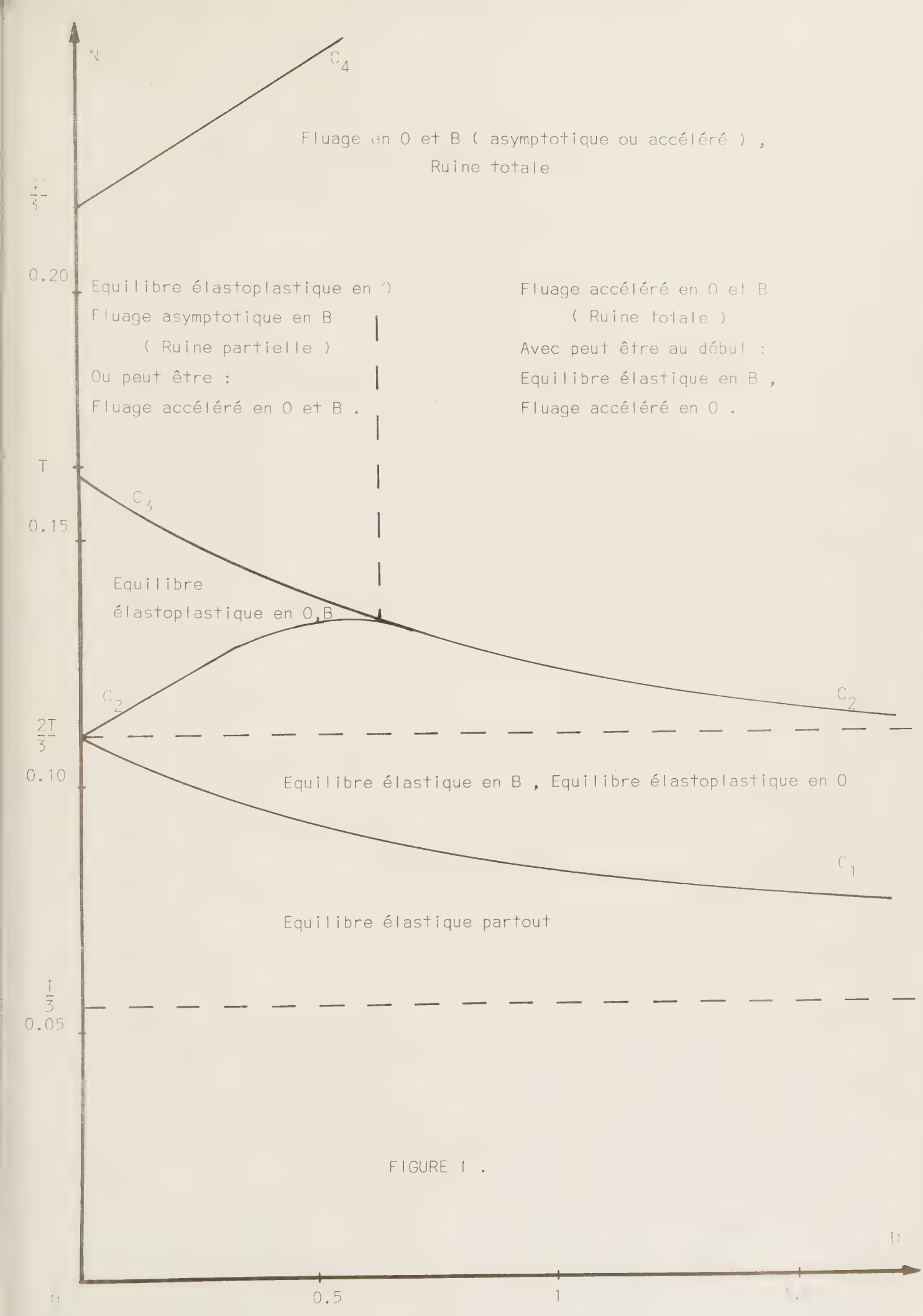

N
C_4
Fluage en 0 et B (asymptotique ou accéléré) ,
Ruine totale
$\frac{1}{3}$
0.20
Equilibre élastoplastique en 0
Fluage asymptotique en B
(Ruine partielle)
Ou peut être :
Fluage accéléré en 0 et B .
Fluage accéléré en 0 et B
(Ruine totale)
Avec peut être au début :
Equilibre élastique en B ,
Fluage accéléré en 0 .
T
C_3
0.15
Equilibre
élastoplastique en 0,B
C_2
C_2
$\frac{2T}{3}$
0.10
Equilibre élastique en B , Equilibre élastoplastique en 0
C_1
Equilibre élastique partout
$\frac{1}{3}$
0.05
0
0.5
1

FIGURE 1 .

TROISIEME PARTIE : COMPARAISON AVEC LA METHODE CLASSIQUE DES CHARGES LIMITES.

I. EVALUATION DE LA CHARGE LIMITE D'UN SYSTEME ELASTO-PLASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE.

Nous pouvons calculer les charges limites d'une structure en supposant cette structure parfaitement plastique. La ruine de la structure ne se produira que lorsque cette structure sera transformée en mécanisme. Pour cela, il faudra qu'un certain nombre de barres se déforment plastiquement, dans le cas d'un système réticulé, ou, qu'un certain nombre de rotules plastiques se forment dans le cas d'un système de poutres.

Dans le cas des systèmes hyperstatiques, il y a deux méthodes qui vont nous donner chacune une charge limite.

I.1. METHODE STATIQUE :

Pour un système de poutres, si l'on néglige l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant, un champ de contraintes stable est constitué par des moments fléchissant M(x) satisfaisant pour toute valeur de x aux inégalités

$$M\ min(x) \leq M(x) \leq M\ max(x)$$

Pratiquement, la recherche de la charge limite s'effectue par la méthode des inégalités. Dans le cas du portique (Fig.1) les rotules plastiques peuvent apparaître dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5, X et Y désignant les composantes de la réaction d'appui de gauche.

Nous avons les conditions d'équilibre

$$M_1 = M_5$$

$$M_2 = M_1 - XH = M_4$$

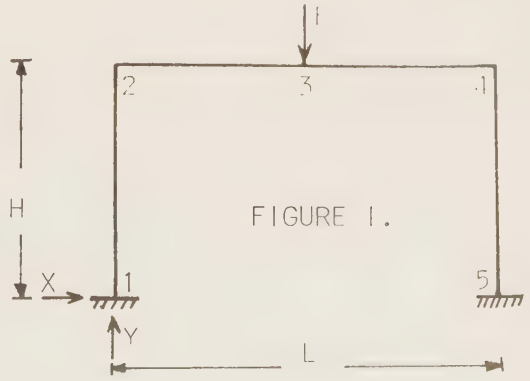


FIGURE 1.

$M_3 = M_1 - XH + \frac{FL}{4}$ d'où $M_2 = M_3 - \frac{FL}{4}$

Soit $\bar{+} M_o = \frac{1}{4} bh\sigma$, les valeurs limites du moment fléchissant, en introduisant pour simplifier l'écriture, les quantités sans dimension.

$$m_i = \frac{M_i}{M_o} \qquad \alpha = \frac{FL}{M_o}$$

l'équation devient $m_2 = m_3 - \frac{\alpha}{4}$ (1)

en exprimant que le module de m_2 est inférieur à l'unité, nous obtenons la double inégalité : $-1 < m_3 - \frac{\alpha}{4} < 1$

Résolvons cette double inégalité par rapport à α, sachant que le module de m_3 doit être inférieur à l'unité, nous trouvons : $-8 < \alpha < 8$

La charge limite est donc $F = \frac{8M_o}{L}$, d'où N = T $\forall$ D.

Si $\alpha = 8$ les inégalités ne laissent possible que la valeur $m_3 = 1$ et l'équation (1) donne $m_2 = -1$. Le mécanisme de ruine comporte donc trois rotules plastiques en 2, 3, et 4.

Voir courbe C_5 page 47 (Fig.4).

I.2. METHODE CINEMATIQUE :

Pour un système de poutres, le travail des forces intérieures est égal à $\sum_i \bar{M}_i \theta_i$, θ_i étant la rotation de la rotule plastique située dans la section critique qui supporte le moment limite M_i.

Pratiquement, la recherche de la charge limite s'effectue par la méthode de superposition des mécanismes.

Reprenons l'étude du portique de la (Fig.1), il y a un seul mécanisme élémentaire représenté sur la (Fig. 2), l'équation d'équilibre correspondante est :

$-M_2 + 2M_3 - M_4 = \frac{FL}{2}$ (2).

Pour ce mécanisme de rupture, le travail des forces intérieures :

$\mathcal{C}_i = \sum_i M_i \theta_i = -2M_2\theta + M_3 \cdot 2\theta$

et le travail des forces extérieures

$\mathcal{C}_e = \frac{1}{2} FL \theta$

nous donne en faisant $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_e$, $M_2 = -M_3 = M_0$ la limite supérieure de la force :

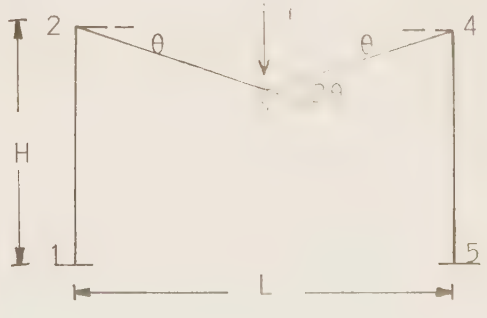


FIGURE 11

$F = \frac{8M_o}{L} \longrightarrow N = T \quad \forall D$

qui est la même dans le cas de la méthode statique, car il n'y a qu'un seul mécanisme élémentaire de la méthode cinématique et la distribution de moment stable de la derniere est statiquement admissible, en effet, pour ce mécanisme, nous avons $M_2 = -M_o$ $M_3 = 2 M_o$ $M_4 = - M_o$ et l'équation d'équilibre (2) nous donne : $M_o + 2M_o + M_o = \frac{FL}{2}$ $F : \frac{8M_o}{L}$

Donc la charge limite la plus défavorable est $\frac{8M_o}{L}$

On constate que cette valeur correspond à la ruine totale. D n'intervient pas explicitement dans ce calcul. Voir courbe C_5 page 47 (Fig.4) . Ce qui ne signifie pas que ce résultat soit valable quelque soit D. En effet, pour H assez grand, s'introduit le phénomène du flamblement.

II. DOMAINE DE VALIDITE : CAS DE FLAMBEMENT :

L'étude du flambement d'un montant d'un portique encastré (Fig. 3), montre que les efforts dans le montant deviendront infinis si :

$\sin U + \gamma U \cos U = 0$ avec $\gamma = \frac{1}{6D}$ $U = \frac{FH^2}{EI}$

Il en résulte que la force critique de flambement du montant à pour valeur :

$F_e = 2 U_1 \frac{EI}{H^2}$

U_1 désignant la plus petite racine positive de l'équation

$tgU + \gamma U = 0$

On a : $\frac{\pi}{2} \leqslant U_1 \leqslant \pi$, les limites étant atteintes pour

d'une part $D = \infty$, cas dans lequel $F_e = 2 \pi^2 \frac{EI}{H^2}$

d'autre part, D = 0, cas dans lequel $F_e = \frac{\pi}{2} \frac{EI}{H^2}$

D	U_1	N
1	$1{,}73\ \frac{\Pi}{2}$	0,225
1,11	$1{,}75\ \frac{\Pi}{2}$	0,187
1,23	$1{,}77\ \frac{\Pi}{2}$	0,154
1,45	$1{,}8\ \frac{\Pi}{2}$	0,112

Voir courbe C_6 (Fig. 4).

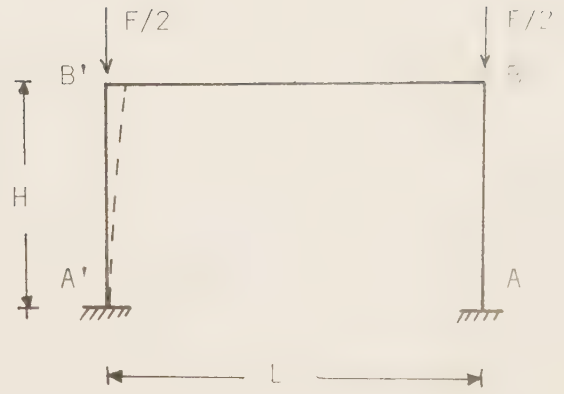


FIGURE III.

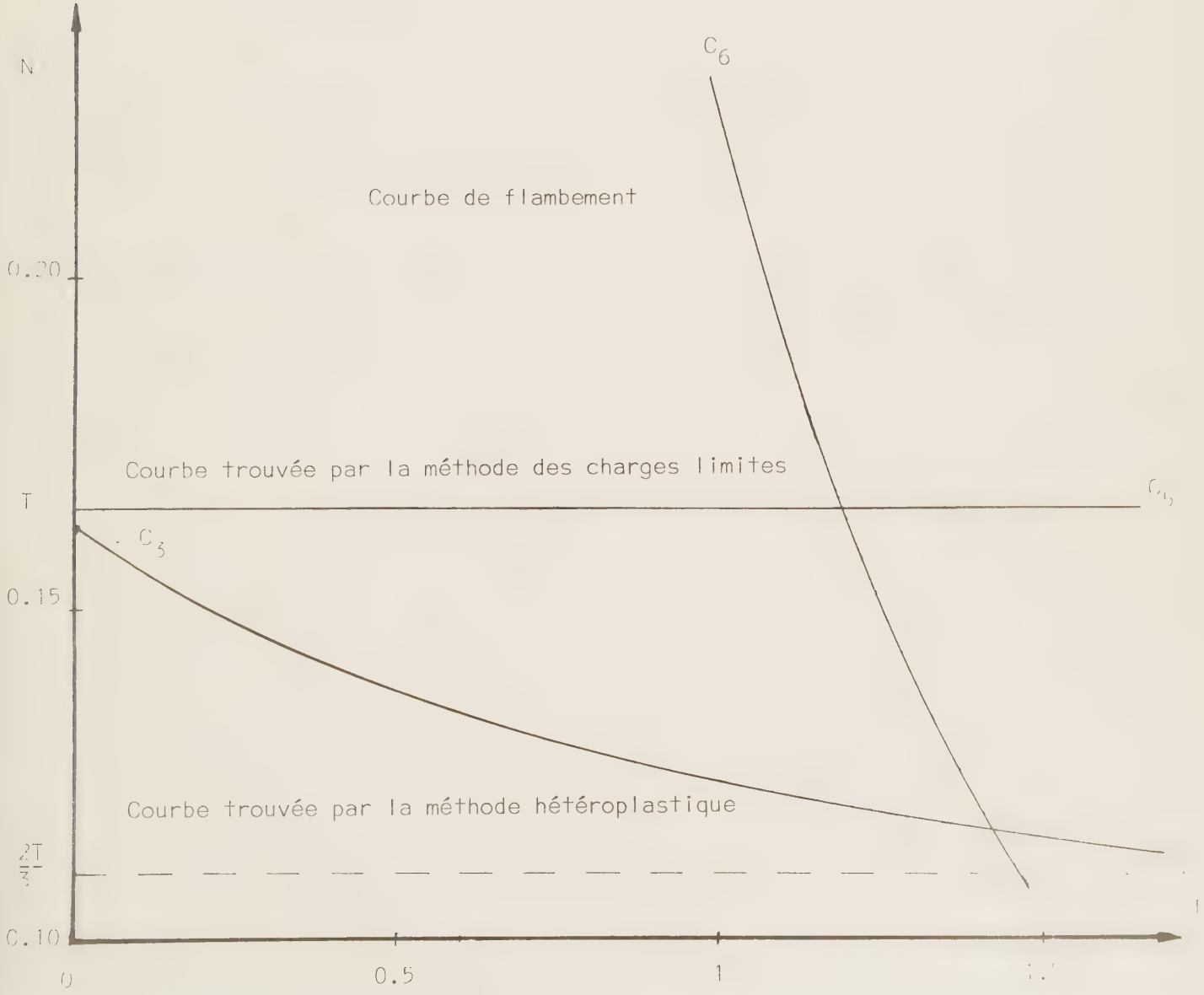


FIGURE IV .

III. CONCLUSION :

La comparaison des résultats obtenus en utilisant la méthode hétéro-plastique, puis la méthode classique des charges limites montre que :

- 1. Possibilité de détérioration par fluage lent de la structure,
- 2. Mise en évidence avec la première méthode, de la variation de la charge entrainant la ruine avec la hauteur des montants, paramètre qui n'intervient pas dans la deuxième méthode.
- 3. Les charges trouvées par la première méthode sont toujours inférieures aux charges calculées par la seconde, ce qui va dans le sens de la sécurité pour la structure.

En conséquence, nous pensons que la méthode classique des charges limites a son utilité de par sa simplicité, et permet de déterminer rapidement un ordre de grandeur de la charge entrainant la ruine, bien que surestimant celle-çi .

Inversement, si la méthode hétéro-plastique nécessite des calculs plus importants, ses résultats font intervenir la configuration géométrique de la structure et permettent la prévision avec beaucoup de souplesse du comportement de celle-ci.

CHAPITRE III

VERIFICATION EXPERIMENTALE.

I. INTRODUCTION :

Les essais effectués au Laboratoire d'ORSAY de l'Université de PARIS-SUD, puis au Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'E.N.S.E.T. à CACHAN, sont isothermes (température ambiante sensiblement 20°C)

Le matériau utilisé pour la réalisation du portique est un AU4G du commerce, livré en barres de section carrée (b = h = 40 mm).
Les caractéristiques du portique sont les suivantes :
- longueur constante L = 2m , hauteur variable H , nous rappelons que $D = \frac{H}{L}$

Il a été effectué trois essais :
un essai avec D = 0,5
deux essais avec D = 0,625

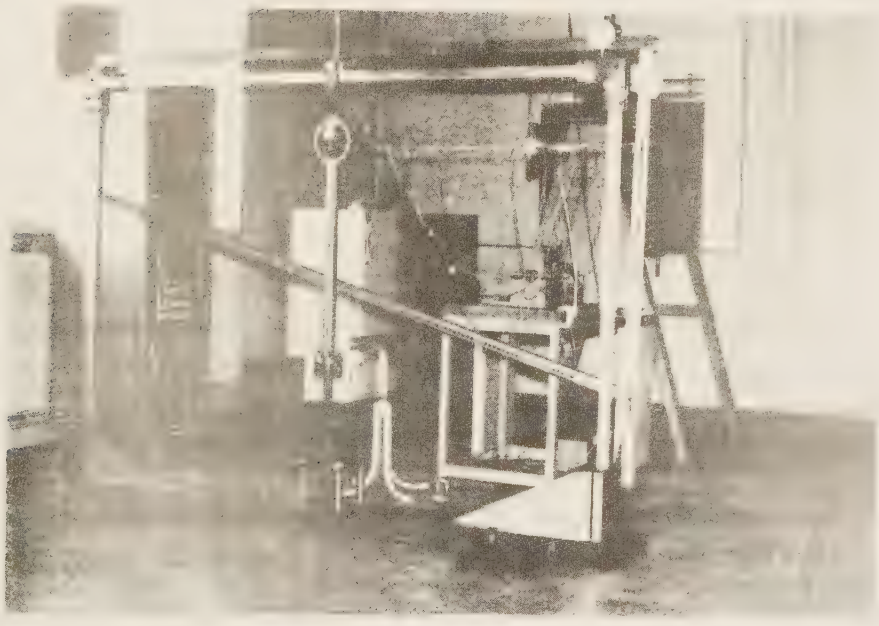
La liaison entre la traverse et les montants s'effectue par l'intermédiaire d'équerre en acier, de façon à respecter d'une part l'orthogonalité, et d'autre part, nous l'espérons, la notion d'encastrement (Fig.1). Par ailleurs, la liaison avec un bâti fixe et rigide constitué par un fer en U de grandes dimensions, se fait au moyen d'équerres de fortes dimensions, de façon à obtenir un encastrement aussi parfait que possible (Fig.2).

II. ACQUISITION DE DONNEES :

Les données accessibles sont de deux sortes : d'une part la force appliquée F, d'autre part la déformation du portique.

II.1. LA FORCE APPLIQUEE :

La force agissant au milieu de la traverse, est appliquée par l'intermédiaire d'un vérin (de capacité 0-2 tonnes) fixé au bâti et qui exerce sur la traverse une force variant linéairement. L'avantage de cet appareil est sa souplesse d'utilisation, le fait qu'il est manoeuvré à la main et surtout le fait qu'il



est auto-verrouillant, ce qui lui permet de maintenir la charge indéfiniment sans glissement.

Afin de mesurer l'effort appliqué, nous interposons un dynamomètre, (dont on apprécie facilement le 1/100, ce qui correspond à un F de 6 Kg) .

II.2. LA DEFORMATION DU PORTIQUE :

Dans le but de mesurer la déformation des différents points du portique étudié, nous avons placé suivant le plan (Fig.3) des jauges électriques (par une colle polymérisantà froid) ce qui nous a permis de suivre l'évolution des domaines plastiques sur le portique.

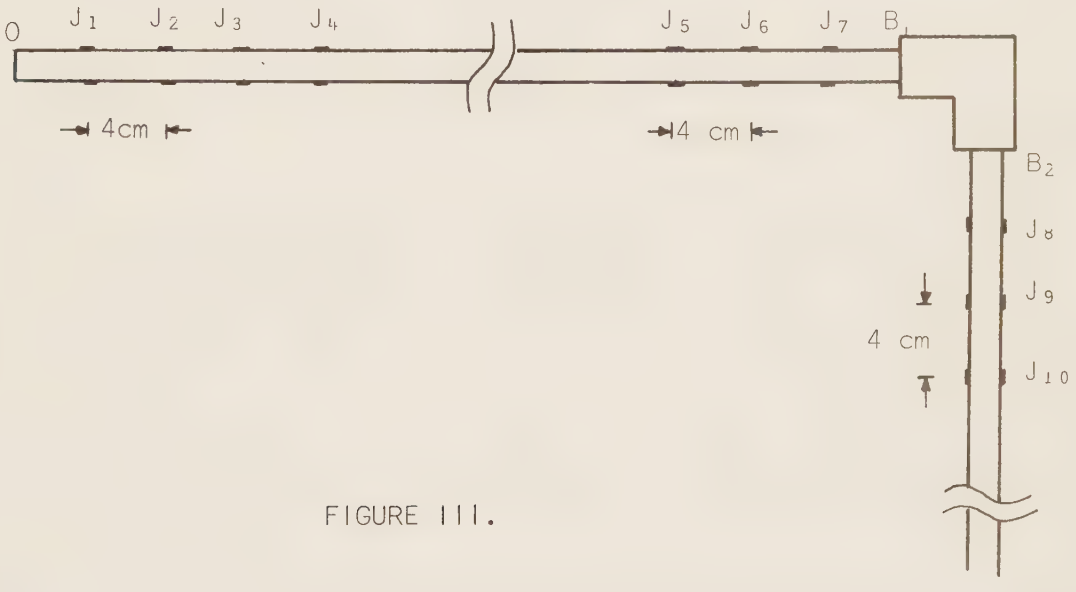


FIGURE III.

En un point d'abscisse x, où on va considérer le domaine fluant, les jauges sont posées l'une sur la face travaillant en compression, l'autre sur l'autre face, qui de ce fait travaille en traction. Le signal donné par les jauges à été directement transformé en déformation par l'intermédiaire d'un pont manuel (amplification) sans calcul.

Aussi, nous avons placé judicieusement des comparateurs, ce qui au niveau des équerres, nous a permis de constater la conservation de l'orthogonalité. D'autre part, une règle graduée en millimètres, nous a permis de mesurer la flèche au point d'application de la charge.

III. RESULTATS DES ESSAIS :

Après la mesure des conditions initiales, le chargement est constitué d'une succession de montées en charge aussi rapides que possibles, d'amplitutde constante ΔF = 50 Kg, séparées par des paliers d'une dizaine de minutes pendant lesquels, il a été possible de balayer trois fois l'ensemble des jauges.

D'après les expériences, nous déduisons les phénomènes suivants :
- Dans certains cas, nous sommes redescendus à F= 0 , de façon à préciser suivant la présence ou non de déformations permanentes, la valeur de la limite élastique. Ce procédé nous a permis de mettre en évidence que la charge donnant la limite élastique variait avec la hauteur du montant à savoir :

D = 0,5	$800 < F_e < 900$
D = 0,625	$800 < F_e < 850$

- Pour certaines valeurs de la charge, il a été possible de remarquer qu'en certains points, il n'y avait pas stabilisation, mais croissance de la déformation, nous en avons déduit qu'en ces endroits, la structure se plastifiait. Ce phénomène qui se produit en premier autour du point O, apparait pour

D = 0,5	F_1 = 1200 Kg	(tableau 1 annexe III)
D = 0,625	F_1 = 1150 Kg	(tableau 2 annexe III).

- Puis la sollicitation augmentant, le phénomène précédant se propage à la jauge J_2, J_3 ... ceci caractérise l'évolution du fluage dans le domaine Δ_1. La sollicitation augmentant toujours, la croissance de la déformation plastique de part et d'autre du point B (J_6, J_7, J_8, J_9) apparait seulement pour

D = 0,5	F = 1300 Kg	(tableau 1 annexe III).

- Ensuite, nous avons pu apprécier la charge entrainant la ruine de la structure, lorsqu'il nous a été possible de constater qu'en un point au moins non situé dans Δ_1 , de la structure se produisait une évolution du fluage, accompagné (durant le palier de 10 minutes) d'une diminution de la déformation pour les points de Δ_1 (Fig.1, Fig.2 et les tableaux 1 et 2 annexe III), ce qui

explique que la force ne convenait plus, et d'autre part une diminution de la charge indiquée par le dynamomètre, ce qui explique qu'il n'ait plus été possible de maintenir cette charge. Nous avons observé ce phénomène pour :

D = 0,5	F = 1400 Kg	suivant tableau I annexe III
D= 0,625	F = 1300 Kf	suivant tableau 2 annexe III.

a partir de cet instant, il nous a été possible de montrer qu'en augmentant la force, on augmentait d'autant le phénomène de fluage. Le portique prend une forme définitive suivante(Fig.4).

- On détermine les domaines paraboliques du fluage Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , à partir de la charge où existent des plastifications suivant les tableaux 1 et 2 annexe III pour :

D = 0,5	$\Delta_1 >$ 12 cm	Δ_2 = 8 cm	Δ_3 = 8 cm
D = 0,625	$\Delta_1 >$ 8 cm	(Δ_2 et Δ_3 n'étaient plus relevables)	

Enfin, quand on annule la charge, le portique prend la forme précisée sur la (Fig.. .où on distingue précisément les domaines paraboliques de fluage aux points 0, B_1 et B_2.

- Comme il n'était pas possible de mettre en évidence les domaines Δ_2 et Δ_3 pour D = 0,625 nous avons conclu, que ces zones, si elles existaient devaient être petites , d' où un deuxième essai (Fig.3 et Fig.4 annexe III), en ajoutant des jauges J_o , J_{B_1} , J_{B_2} , (Fig.6) .

Ceci étant pour F = 1250 Kg , nous avons constaté qu' il y a simultanément fluage en B_1 et B_2 pour :

D = 0,625

Δ_1 > 8 cm	Δ_2 < 4 cm	Δ_3 < 4 cm

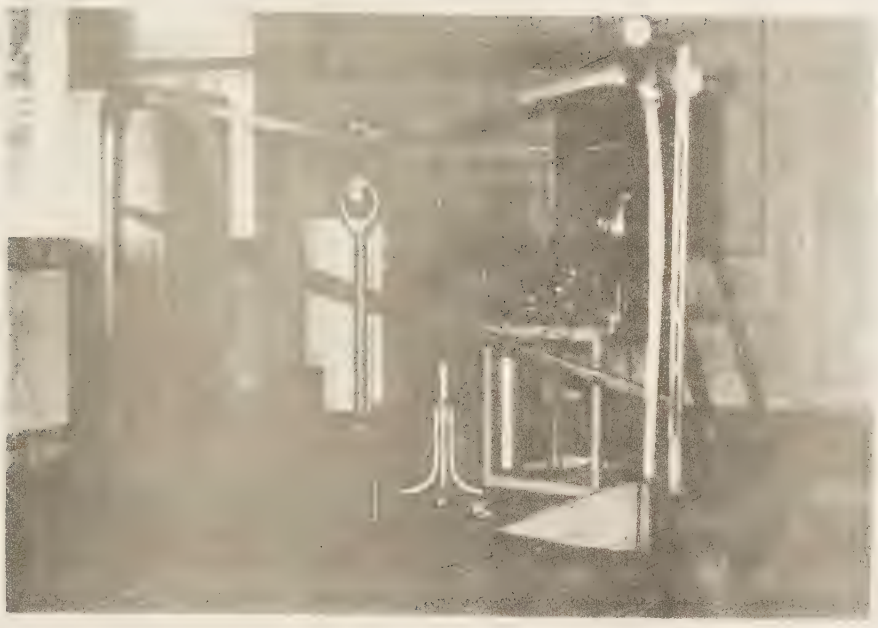


FIGURE VI .

IV. COMPARAISON THEORIE-EXPERIENCE :

Les résultats des charges sont consignés dans le tableau ci-dessous :

D	Fo th Kg	Fo Exp Kg	F_m th Kg	F_m Exp Kg
0,5	867	850	1302	1400
0,625	840	800	1262	1300

Par rapport à la courbe théorique donnant la ruine, les points expérimentaux se situent, ainsi que l'indique la Fig.7, avec un écart de l'ordre de 8 %, mais qui va dans le sens de la sécurité. Par contre, la méthode classique de la charge limite donne pour N des valeurs trop fortes.

D'autre part, les résultats des domaines paraboliques du fluage et de la flèche au milieu sont consignés dans le tableau suivant :

D	Δ_1 th cm	Δ_1 exp cm	Δ_2 th cm	Δ_2 exp cm	Δ_3 th cm	Δ_3 exp cm	ζ th cm	ζ exp cm
0,5	16,6	$>$ 12	2,4	8	5,7	8	6,57	6,6
0,625	17,6	$>$ 08	0,2	$<$ 4	0,3	$<$ 4	6,84	7

On remarque que, près des équerres, le fluage est moins "localisé" que ne l'indique la théorie.
A noter aussi que le déplacement d'ensemble des équerres était de :

3 cm pour D = 0,5
2,5 cm pour D = 0,625.

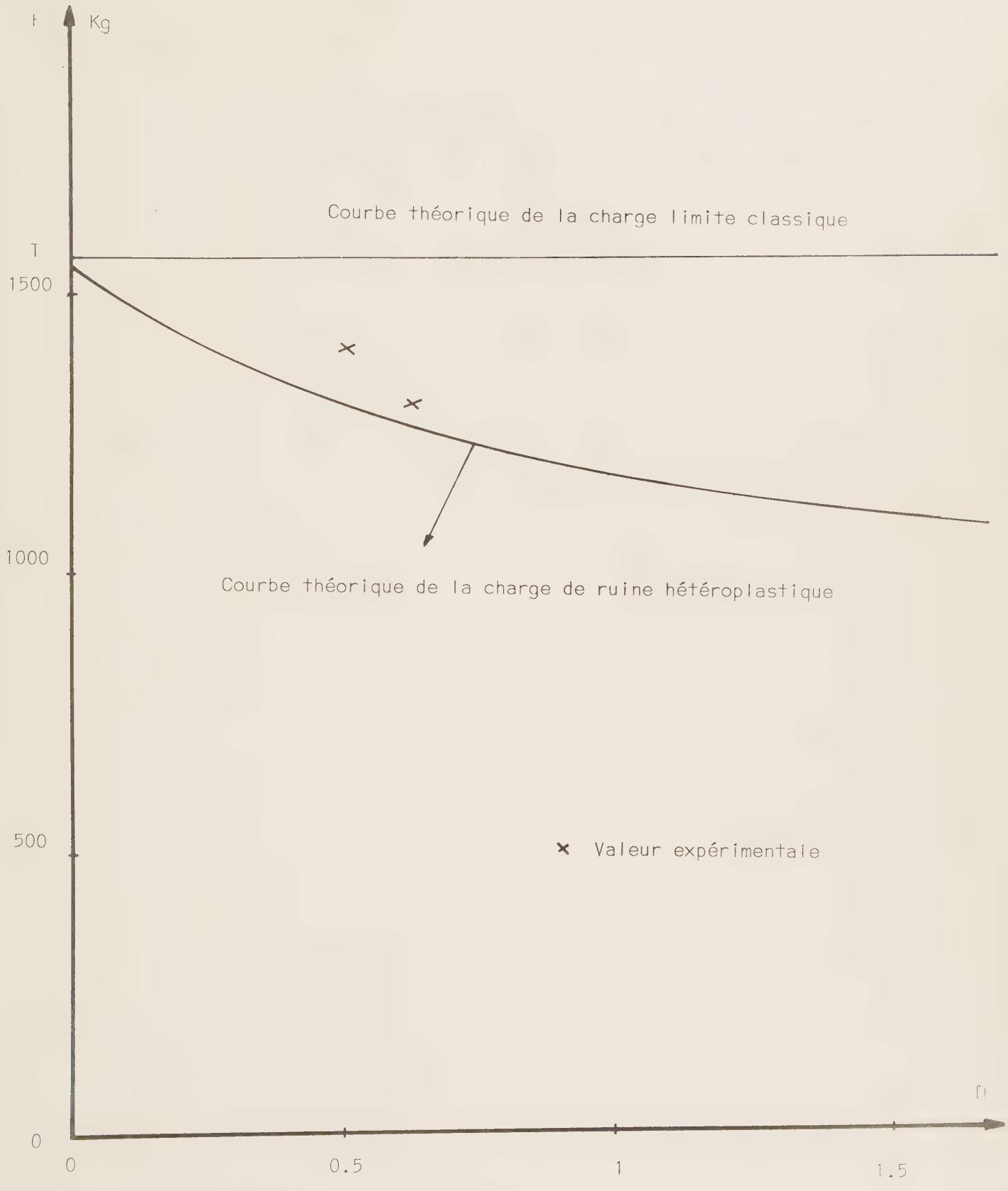

F
Kg
Courbe théorique de la charge limite classique
T
1500
1000
Courbe théorique de la charge de ruine hétéroplastique
500
Valeur expérimentale
D
0
0
0.5
1
1.5

FIGURE VII .

V. CONCLUSION :

Les valeurs expérimentales trouvées, bien que supérieures à celles données, par l'application de la méthode hétéro-plastique (écart 8 %), sont cependant nettement inférieures aux charges calculées par la méthode classique des charges limites, ce qui justifie, ne serait-ce que parce que cela va dans le sens de la sécurité, l'emploi de la première méthode de préférence à la deuxième.

En outre, les résultats expérimentaux trouvés confirment le fait que la charge entrainant la ruine dépend de la hauteur du montant, ce qui n'est pas pris en compte par la méthode classique.

En conséquence, la méthode hétéro-plastique, fondée sur une connaissance approfondie du matériau, en utilisant les conditions d'équilibre et les conditions de plasticité en tous points, permet de calculer, outre la prévision de la ruine de la structure, l'évolution de celle-ci dans le temps et ceci nous semble très important quand on voit l'importance du facteur "temps" pour la détermination des "durées de vie".

ANNEXE I

L'HETEROPLASTICITE DES MATERIAUX METALLIQUES

I. INTRODUCTION :

Il existe de nombreuses théories de la résistance des matériaux tenant compte d'une certaine hétérogénéité de la matière microscopique. Toutes font état de contraintes microscopiques locales réparties selon une loi statistique, et dont la valeur moyenne s' identifie à la contrainte macroscopique classique. La dispersion s'introduit comme un paramètre nouveau permettant d'expliquer la fatigue.
Dans l'exposé qui va suivre, la statistique porte non sur les contraintes mais sur les limites élastiques ou seuil de fluage.

II. MATERIAUX HETERO-PLASTIQUES :

On appellera matériau hétéroplastique, un matériau formé de micrograins (micro-éléments) enchevêtrés ayant chacun une limite élastique ε_{Mi} différente dans la direction où le matériau est sollicité, ces micrograins sont soudés ensemble de manière à constituer des éléments plus gros appelés grains, eux-mêmes soudés ensemble et assez petits pour que leur grand nombre donne, à l'échelle macroscopique, l'apparence de l'homogénéité et de l'isotropie. Cette définition convient particulièrement à un matériau métallique formé de mono-cristaux (micrograins) eux-mêmes groupés en polycristaux (grains) très nombreux dans ce qu'on appelle, en mathématique, "l'élément de volume" du milieu matériel.

Prenons comme exemple de matériau hétéroplastique le duralumin AU4G2 , qui cristallise dans le système CFC et opérons par chargement progressif sur un monocristal réalisé en laboratoire. Nous obtenons une courbe contrainte-déformation ($\frac{\sigma_i}{E}$, ε_i) ayant l'allure ci-contre (Fig.1).

FIGURE I .

Elle présente quatre régions :

- 1. DEFORMATION ELASTIQUE (REVERSIBLE)

  Les files de dislocations restent ancrées.

- 2. GLISSEMENT FACILE :

  Déformation plastique (irréversible) quasi-instantanée.
  Premier relâchement de la contrainte. Les files de dislocation se libèrent et se déplacent rapidement dans un plan de glissement privilégié suivant une direction privilégiée de ce plan correspondant à l'énergie minimale.

- 3. DURCISSEMENT RAPIDE :

  Les dislocations, arrêtées par l'entrecroisement des plans de glissement, se déplacent maintenant par "glissement dévié" ou "montée" dans un milieu qui freine leur vitesse.

- 4. SECOND RELACHEMENT DE LA CONTRAINTE

  par suite d'une orientation plus favorable d'un plan de glissement.
  Cette phase aboutit au fluage établi, à la striction et à la rupture ductile (à moins qu'une rupture fragile - par décohésion - ne se soit produite plus tôt).

III. COURBE CONTRAINTE-DEFORMATION A VITESSE CONSTANTE :

Expérimentalement , à partir d'un essai d'écrouissage en traction simple à vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, constante, on trouve une courbe contrainte-déformation analogue à la courbe (Fig.1) sauf pour la phase II du glissement facile qui présente une contrainte limite inférieure (Fig.2).

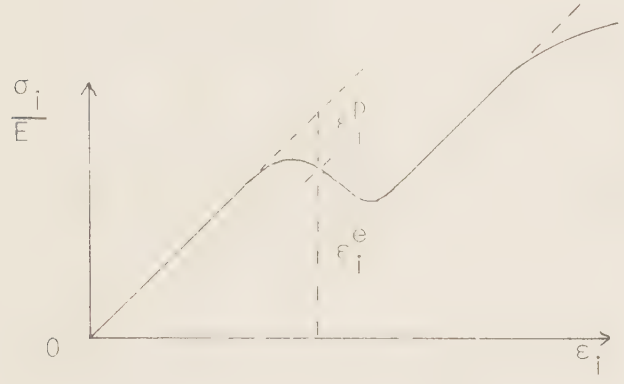


FIGURE II .

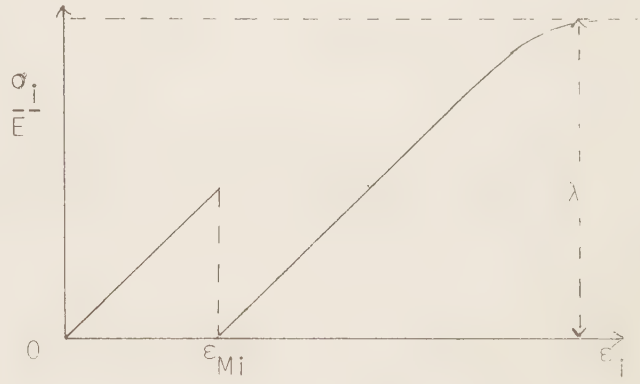


FIGURE III .

A un instant quelconque, on définit la déformation élastique par :

$$\varepsilon^e_i = \frac{\sigma_i}{E}$$ (loi de HOOKE).

E : Module d'YOUNG

et la déformation plastique par

$$\varepsilon^p_i = \varepsilon_i - \varepsilon^e_i$$ (hypothèse de partition).

Nous appellerons "fluage" la production de déformation plastique. Le fluage possède une propriété importante, révelée par l'expérience, qu'on appelle " hésitation du fluage ", et qui peut s'énoncer ainsi :
Sous certaines conditions de contraintes, si pour une raison quelconque, la vitesse de déformation plastique diminue, elle diminue jusqu'à zéro ; en d'autres termes : le fluage contrarié marque un temps d'arrêt, quitte à reprendre ensuite.

Dans le cas présent, ces conditions sont remplies ; la courbe admet un second point où le coefficient angulaire de la tangente est égal à l'unité.

Cherchons à construire un modèle mathématique simple adapté à la réalité physique. Pour cela, autorisons-nous à schématiser la courbe expérimentale en la modifiant légèrement, pour éviter l'introduction d'un trop grand nombre de paramètres sujets à des variations aléatoires. (Fig.3).

ε_{Mi} désigne la limité élastique dans la direction de la sollicitation et sera sujet à une variation aléatoire entre une limite inférieure et + ∞.

Nous poserons :

$$\sigma_i = 0 \text{ et } \dot{\varepsilon}_i^p = 0 \text{ pour } \varepsilon = \varepsilon_{Mi} + 0$$

et nous introduirons, pour ε_i tendant vers l'infini (interpréter : suffisament grand), une asymptote horizontale correspondant au fluage établi à la vitesse $\dot{\varepsilon}_i$.

IV. HYPOTHESE SUR LES LOIS CONSTITUTIVES DU MATERIAU :

L'allure de la courbe (Fig.3) peut se déduire par un raisonnement logique d'un certain nombre d'hypothèses :

IV. 1. A L'ECHELLE MICROSCOPIQUE

H1 - HYPOTHESE DE PARTITION

L'état du matériau en un point dépend de deux paramètres en général non observables (cachés) qui définissent deux modifications géométriques à partir de l'état non chargé : une déformation dite "élastique" ε_i^e et une déformation dite "plastique" ε_i^p variable d'un micrograin à l'autre.

H2 - HYPOTHESE DE L'INDIFFERENCE DES CONTRAINTES

La contrainte σ_i subie par un micrograin, dans la direction de la charge, peut se définir indifférement comme fonctionnelle temporelle de la déformation élastique ε_i^e ou de la déformation plastique ε_i^p.

$$\sigma_i = F (\varepsilon_i^e) = G (\varepsilon_i^p)$$

Cette hypothèse revient à admettre que, la déformation plastique

étant dûe au mouvement des dislocations, on peut la connaissant, ainsi que son évolution dans le temps, calculer les contraintes dans le milieu élastique qui l'enrobe, et de là, déduire la déformation élastique dont le rôle est d'assurer la compatibilité des déformations globales.

H3 - HYPOTHESE DE LA LIMITE ELASTIQUE APPARENTE

Il existe, pour chaque micrograin, une limite élastique ε_{Mi} différente d'un micrograin à l'autre, dans la direction de la sollicitation.
Cette différence peut être dûe soit à une orientation aléatoire des plans de glissement du monocristal au sein du polycristal ou "grain", soit à une valeur aléatoire du seuil de glissement, soit aux deux causes réunies.
Cette limite que nous appellerons "limite élastique apparente", dépend, en principe, de $\dot{\varepsilon}$ (vitesse de déformation).

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_{Mi}(\dot{\varepsilon}) \quad \rightarrow \quad \varepsilon_i^p = 0$$

H4 - HYPOTHESE DU SEUIL DE FLUAGE ET HETEROGENEITE

Le seuil de fluage est défini par le critère de VON MISES, autrement dit, la déformation plastique apparait lorsque le module e du déviateur de la déformation totale dépasse une certaine valeur e_M.
D'autre part, l'hétérogénéité microscopique du matériau se traduit par le fait que cette valeur e_M varie d'un micrograin à l'autre. Si l'on affecte chaque micrograin d'un indice, le seuil de fluage pour le micrograin d'indice i sera donc défini par

$$e_i = e_{Mi}$$

H5 - HYPOTHESE DE PLASTIFICATION INSTANTANEE

Pour $\varepsilon = \varepsilon_{Mi}$: relâchement de la contrainte avec disparition instantanée de la résistance élastique (décrochement des dislocations). En même temps : plastification instantanée de la déformation élastique acquise (noter que ce n'est pas une contrainte limite, mais une déformation limite, qui entraîne l'écoulement).

H6 - HYPOTHESE DES LOIS DE COMPORTEMENT

Pour un matériau non sujet au vieillissement, les fonctionnelles de la formule H2 sont indépendantes de l'instant considéré. Elles présentent, en outre, le caractère newtonien, c'est-à-dire qu'elles ne mettent en jeu, au plus, que la déformation (élastique ou plastique) à l'instant t et la vitesse de déformation (élastique ou plastique) au même instant :

$$F\left(\varepsilon_i^e\right) \equiv f\left(\varepsilon_i^e, \dot{\varepsilon}_i^e\right), \quad G\left(\varepsilon_i^p\right) \equiv g\left(\varepsilon_i^p, \dot{\varepsilon}_i^p\right)$$

La contrainte se calcule indifférement, connaissant la déformation élastique $\varepsilon_i^e(t)$, ou la déformation plastique $\varepsilon_i^p(t)$, à partir de la déformation élastique, nous avons :

$$\frac{\sigma_i}{E} = \varepsilon_i^e \qquad \text{(Loi de HOOKE).}$$

A partir de la déformation plastique, l'expérience fournit en régime permanent et pour σ_i assez grand ($\dot{\varepsilon}_i^p \simeq \dot{\varepsilon}$) :

$$\varepsilon_i > \varepsilon_{Mi} \qquad \frac{\sigma_i}{E} = \left(\tau\, \dot{\varepsilon}_i^p\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Loi de BAILEY-NORTON)}$$

(τ,n : constantes spécifiques).

Nous supposerons cette loi valabe pour $\dot{\varepsilon}_i^p$ et σ_i quelconques, il n'y aurait d'ailleurs pas de difficultés à poser plus généralement :

$$\frac{\sigma_i}{E} = \gamma_i + \left(\tau\, \dot{\varepsilon}_i^p\right)^{\frac{1}{n}}$$

avec γ_i = une constante relativement petite, qui multipliée par E, représenterait une contrainte élastique résiduelle équilibrée par un frottement interne.

Ce cas serait plus proche de la réalité physique. Nous prendrons néanmoins $\gamma_i = 0$, car ce terme, petit dans le cas du duralumin, n'introduit qu'une correction minime. On peut observer que les lois de comportement présentent le caractère newtonien vis à vis de ε_i^e et ε_i^p (σ_i au plus fonction du paramètre, de sa dérivée première et du temps). l'existence et l'unicité d'un

état sous charges données, avec des conditions aux limites données, ne relève que du théorème de CAUCHY.

IV.2. A L'ECHELLE MACROSCOPIQUE :

H7 - HYPOTHESE DE L'HOMOGENEITE DE LA DEFORMATION

Nous admettrons que cette hypothèse se traduit dans la direction de la sollicitation par :

$$\varepsilon_i = \varepsilon \text{ d'où : } \qquad \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon} = \text{constante}$$

Toutefois, les ε_{Mi}, eux, sont différents (les plans et lignes de glissement ont des orientations quelconques), de sorte que les ε_i^e, ε_i^p, σ_i sont différents.

H8 - HYPOTHESE DE LA LOI DE DISTRIBUTION DES SEUILS DE FLUAGE

Si nous considérons un matériau du commerce ayant subi un traitement industriel, nous admettrons que, en l'absence de tout chargement, il est uniformément peuplé d'un grand nombre de dislocations de telle sorte que, toutes les possibilités de seuils sont représentées dans chaque grain, et se repètent d'un grain à l'autre. Il existe alors une distribution statistique des limites élastiques ε_{Mi} qui est définie par la fonction de fluage $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, donnant dans chaque grain (ou dans chaque élément de volume) le pourcentage de seuils dépassés quand l'allongement macroscopique est ε.
C'est-à-dire que $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ est le rapport du nombre des micrograins subissant une déformation plastique ($\varepsilon_{Mi}(\dot{\varepsilon}) < \varepsilon$) au nombre total de micrograins : (dans un élément de volume au point considéré), on peut écrire :

$$\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{S_o} \int_{S_o} (\partial S_i'')_o$$

en désignant par $(\partial S_i'')_o$ l'aire d'un élément de la section initiale S_o dont la limite élastique est dépassée quand l'allongement dépasse la valeur ε avec la vitesse $\dot{\varepsilon}$. Nous appellerons $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ le taux de plastification dans la direction $\vec{\varepsilon}$. Cette fonction, si elle existe, doit être spécifique du matériau, de la température et du

traitement antérieur ; la fonction $\theta (\varepsilon , \dot{\varepsilon})$ d'abord nulle, est en principe croissante quand ε varie au-delà d'une certaine valeur $\varepsilon_G = \inf (\varepsilon_{Mi})$ mais reste comprise entre 0 et 1.

H9 - LA DEFORMATION ELASTIQUE S'ACCOMPAGNE D'UNE CONTRACTION DE COEFFICIENT (DE POISSON): ν .

La déformation plastique s'effectue à un volume constant ($\nu = \frac{1}{2}$). Il en résulte que la section de l'éprouvette, initialement égale à S_o est devenue pour l'allongement ε_i.

$$S = S_o (1 - 2\nu\varepsilon - 2 (\nu^* - \nu) \theta\varepsilon) \simeq \frac{S_o}{1 + \varepsilon}$$

ν^* : étant un coefficient variable compris entre ν et 1/2, tel que

$$\int_{S_o}^{S} \frac{\partial S_i''}{(\partial S_i')_o} = 1 - 2\nu^*\varepsilon$$

V. NOUVELLE RELATION CONTRAINTE-DEFORMATION :

Soit P la charge de l'éprouvette, posons "référence 3, VI

$$\frac{\sigma}{E} = K$$

où

$$K = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_i^e \, dS_i \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_i^e = \begin{cases} \dot{\varepsilon} & \text{si} \quad \varepsilon < \varepsilon_{Mi} \\ (\tau \dot{\varepsilon}_i^p)^{\frac{1}{n}} & \text{si} \quad \varepsilon > \varepsilon_{Mi} \end{cases}$$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_{Mi}$, ε_i^e a deux valeurs, ε_{Mi} à gauche, zéro à droite.
Il est facile de vérifier qu'avec les hypothèses, la variation de $\frac{\sigma}{E}i$ (ou de ε_i^e) au cours d'un essai de traction à vitesse et température constantes est défini pour le micrograin sous la forme intégrale suivante :

$$\varepsilon^e = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour} \quad \varepsilon < \varepsilon_{Mi} \\ \varepsilon - \varepsilon_{Mi} - \int_{\varepsilon_{Mi}}^{\varepsilon} (\frac{\varepsilon^e}{\lambda})^n \, d\varepsilon & \text{pour} \quad \varepsilon > \varepsilon_{Mi} \end{cases}$$

avec $\lambda = (\tau\dot{\varepsilon})^{\frac{1}{n}}$ représente le rapport à E, de la contrainte de fluage établi ce qui conduit bien à une courbe ayant l'allure de la (Fig.3).
En effectuant la somme des forces intérieures sur une section de l'éprouvette normale à la sollicitation, et introduisant la fonction taux de plastification $\theta(\varepsilon , \dot{\varepsilon})$ qui doit en principe varier de 0 à 1 quand ε varie de $\varepsilon_G = \inf(\varepsilon_{Mi})$ à ∞, en rappelant que la vitesse de déformation reste constante au cours de l'essai soit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \text{Constante} \qquad \forall\ \varepsilon$$

on en déduit la contrainte moyenne en fonction de ε et de $\dot{\varepsilon}$ par la formule fondamentale :

$$\frac{\sigma}{E} = K(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = (1 - \theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}))\ \varepsilon + \int_0^{\varepsilon} \eta\left(\frac{\varepsilon-u}{\lambda(\dot{\varepsilon})},n \right)\ \theta(u,\dot{\varepsilon})\ du$$

ou U : représente la valeur courante de ε_{Mi} .

$\eta(x,n)$: est une fonction numérique de X, qui se tabule aisément pour toutes valeurs de $n > 1$ et de $0 < X < +\infty$(Fig.4).

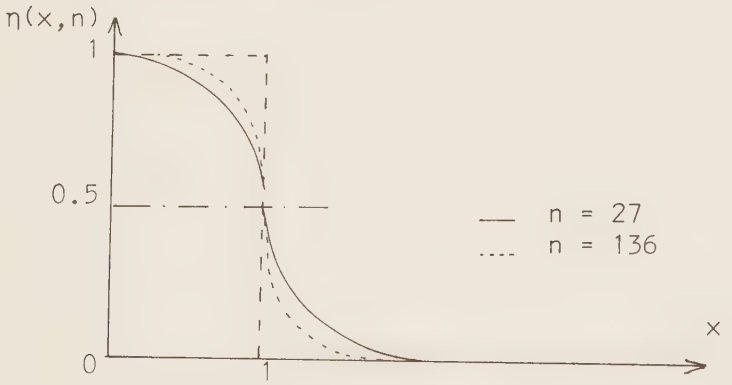


FIGURE IV .

Elle est définie par ;

$$\eta(x,n) = 1 - (Z(x,n))^{n}$$

où Z(X) est la fonction réciproque de

$$x(Z) = \int_0^{Z} \frac{dZ}{1 - Z^n} \qquad \text{pour} \qquad 0 < Z \leqslant 1$$

La formule $K(\varepsilon , \dot{\varepsilon})$ exprime σ en fonction de ε et de $\dot{\varepsilon}$. Elle fait

intervenir, en plus de E, un paramètre λ ne dépendant que de ε et une fonction $\theta(\varepsilon)$ dépendant elle aussi (mais faiblement) de $\dot{\varepsilon}$ et définissant, pour l'allongement ε, le pourcentage de monocristaux qui ont dépassé leur limite élastique et qui, en conséquence, n'opposent plus à la charge appliquée qu'une résistance visqueuse. λ et $\theta(\varepsilon)$ sont considérés comme spécifiques du matériau à la vitesse $\dot{\varepsilon}$.

Il est facile de voir la signification de λ: c'est la limite vers laquelle tend σ/E quand ε augmente indéfiniment (en supposant que $(1-\theta)\,\varepsilon$ tende vers zéro). Autrement dit, son produit par E est la contrainte de fluage établi à la vitesse $\dot{\varepsilon}$. Nous pouvons déterminer expérimentalement λ à partir des valeurs $\dot{\varepsilon}$, τ, n, E.

REMARQUE SUR LA FORMULE FONDAMENTALE $K(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

D'une série d'essais et de calculs effectués à des vitesses $\dot{\varepsilon}$ différentes, on tire les conséquences suivantes :

1. n est grand devant l'unité, cette hypothèse est parfaitement justifiée dans le cas concret qui nous occupe, il nous permet de remplacer

$$n \to \infty \begin{cases} \eta_\infty(x) = 1 & 0 \leqslant x < 1 \\ \eta_\infty(x) = 0 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Le fait que n soit grand devant l'unité fait que l'on se rapproche de cette fonction η_∞ voir (Fig.4), les courbes que nous avons tracées pour des valeurs de n correspondant à des résultats expérimentaux sur de l'AU4G confirme ceci :

$n = 27$ pour $T = 200°$ C
$n = 163$ pour $T = 20°$ C

A 20°C il est donc possible sans faire d'erreur appréciable, d'admettre l'approximation $\eta_{163} = \eta_\infty$ il vient dans ces conditions :

$$K(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} (1-\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}))\varepsilon + \int_{\varepsilon-\lambda}^{\varepsilon} \theta(u,\dot{\varepsilon})\,du & \varepsilon > \lambda \\ (1-\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}))\varepsilon + \int_{0}^{\varepsilon} \theta(u,\dot{\varepsilon})\,du & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda \end{cases}$$

on retrouve ces résultats en faisant au niveau du micro-élément l'hypothèse d'une loi de comportement simplifiée représentée (Fig.5).

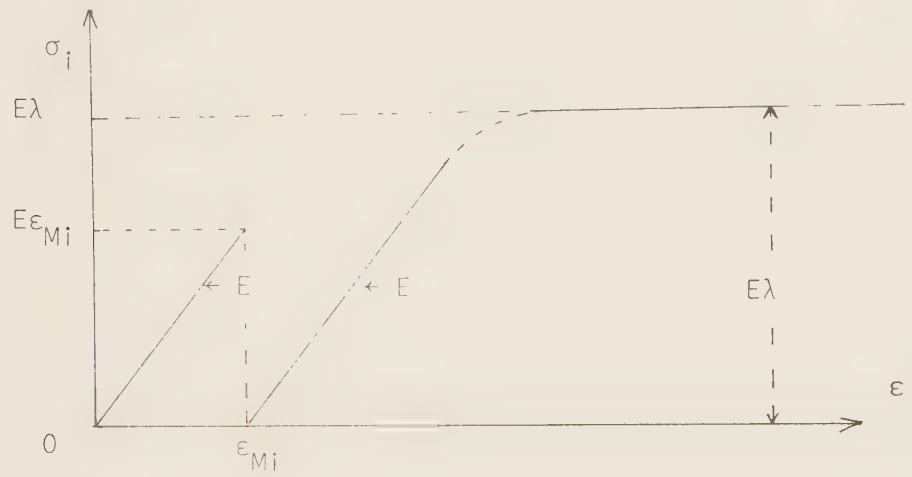


FIGURE V .

Le comportement est défini par les relations suivantes :

$E\varepsilon$	comportement élastique	$\varepsilon < \varepsilon_{Mi}$
0	décrochement plastique instantané	$\varepsilon = \varepsilon_{Mi}$
$E(\varepsilon-\varepsilon_{Mi})$	comportement pseudo-élastique	$\varepsilon_{Mi} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{Mi} + \lambda$
$E\lambda$	écoulement viscoplastique	$\varepsilon > \varepsilon_{Mi} + \lambda$

2. La fonction $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ est spécifique et varie peu avec $\dot{\varepsilon}$, par contre, $K(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ varie beaucoup avec $\dot{\varepsilon}$ quand $\dot{\varepsilon}$ est petit. En prenant pour $\theta(\varepsilon)$ une moyenne des fonction $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, l'éventail des courbes, pour des valeurs de $\dot{\varepsilon}$ allant de zéro à l'infini, s'étage entre les deux courbes limites :

$$K(\varepsilon, 0) = (1 - \theta(\varepsilon))\,\varepsilon$$

$$K(\varepsilon, \infty) = (1 - \theta(\varepsilon))\,\varepsilon + \int_0^{\varepsilon} \theta(u)\,du$$

avec les conditions que ε soit remplacé par zéro si $\varepsilon < \lambda$ avec étalement au voisinage de la première courbe et accumulation au

voisinage de la seconde (Fig.6) :

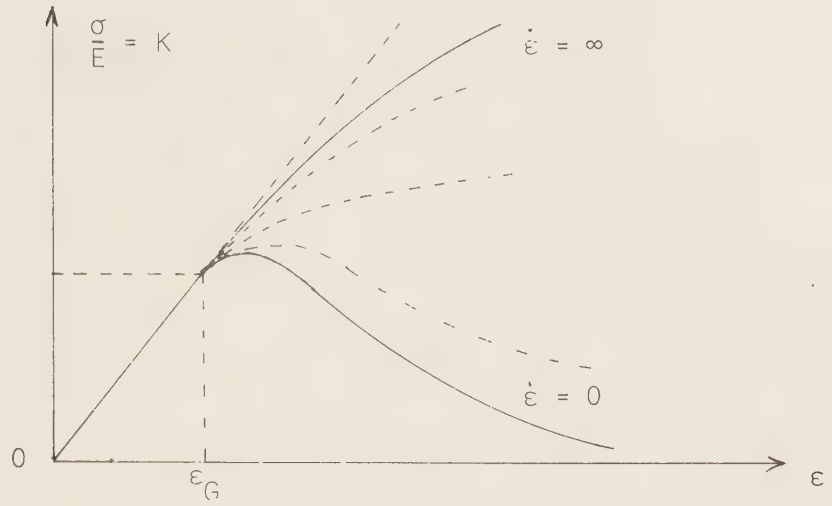


FIGURE Vi .

Il est donc indispensable, quand on donnne une courbe contrainte-déformation à la suite d'un essai de traction ou de compression (essai dit : d'écrouissage), de toujours spécifier la vitesse de l'essai.

3. On peut interpréter le fait que θ dépend de $\dot{\varepsilon}$ par un retard , dans le désancrage des dislocations. Ce retard introduit le terme $\gamma_i(\dot{\varepsilon})$ dont nous avons parlé au début. $\theta(\varepsilon)$ se confond alors avec $\theta(\varepsilon, 0)$, taux de plastification correspondant à une vitesse théoriquement nulle qu'on peut obtenir en extrapolant les courbes $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ vers $\dot{\varepsilon} = 0$. négliger γ_i et prendre $\theta(\varepsilon) \equiv \theta(\varepsilon, 0)$, entraîne une faible erreur qui va dans le sens de la sécurité.

4. Il est à noter ques les constantes spécifiques τ et n peuvent être déduites d'essais d'écrouissage et de relaxation sans que le fluage établi soit nécessairement atteint (il commence au delà de ε_L valeur pour laquelle $\theta = 1$) ;la formule qui donne K doit alors être modifiée, la section de l'éprouvette étant entièrement plastifiée.

VI. COMPARAISON AVEC UNE LOI STATISTIQUE NORMALE :

Selon la référence (3,V) le taux de plastification $\theta(\varepsilon)$ peut être considéré comme une fonction de probabilité associée à la libération des boucles de dislocation -(qui existent en grand nombre dans le matériau) - de leurs ancrages élastiques (noeuds). $d\theta(\varepsilon)$ est, en effet, la probabilité pour que, si l'on prend au hasard un micrograin, sa limite élastique apparente soit comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$. Il est naturel que nous comparions la fonction $\theta(\varepsilon_{Mi})$, à la fonction qui définirait la probabilité normale de sortie du nombre ε_{Mi}, dans un tirage au sort parmi tous les nombres ε_{Mi}, d'un ensemble continu compris entre une certaine limite inférieure positive ε_G (limite élastique vraie) et $+\infty$, sachant que le nombre dont la probabilité de sortie est la plus grande est $\varepsilon_G + D_1$. Remplaçant ε_{Mi} par ε, cette fonction (qui porte le nom de fonction de RAYLEIGH) est :

$$\theta_R(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_G \\ 1 - \exp\left(\dfrac{-(\varepsilon-\varepsilon_G)^2}{2D_1^2} \right) & \text{pour} \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_G \end{cases}$$

dans laquelle D_1 représente la dispersion et $\varepsilon_G + D_1 = \varepsilon_M$, la valeur moyenne de la grandeur considérée, ici la limite élastique ε_{Mi} d'un micrograin.

Pour effectuer cette comparaison, nous utiliserons la fonction :

$$F(\varepsilon) = \left(-2 L_N (1 - \theta) \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui lorsque θ coïncide avec θ_R, est représentée dans le plan par une droite d'abscisse à l'origine ε_G et de coefficient angulaire $1/D_1$.

En conséquence, nous admettrons l'hypothèse que la partie rectiligne de $F(\varepsilon)$ représente le phénomène normal, autrement dit : au cours d'un chargemement réalisant un étirement à vitesse constante, la loi de distribution des limites élastiques apparentes dans un matériau hétéro-plastique parfait non écroui, est normale au sens de RAYLEIGH.

Concrètement, nous prendrons la représentation analytique suivante pour exprimer la fonction $F(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ (Fig.7).

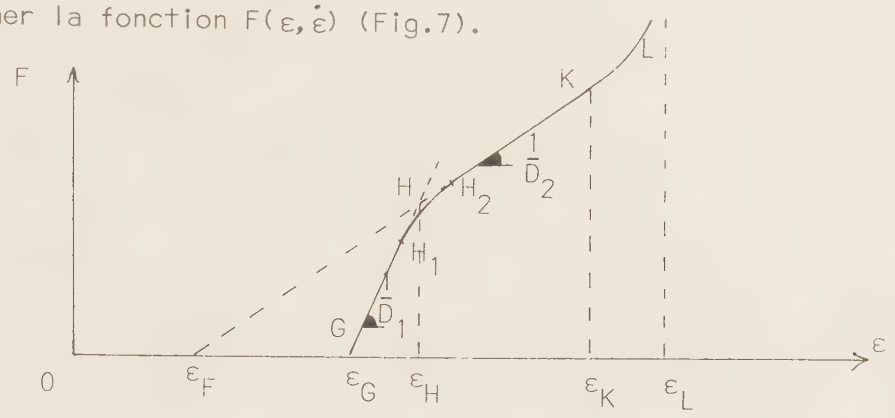


FIGURE VII .

Cela revient à décomposer la courbe représentative de $F(\varepsilon)$ en deux segments de droite GH_1 et H_2K , deux car le matériau est déjà écroui , ne serait-ce que par l'usinage des éprouvettes et une branche d'hyperbole.
Le prolongement de la partie rectiligne H_2K jusqu'à l'axe ε définit la limite élastique de l'éprouvette non écrouie, l'écart entre ce prolongement et le tracé effectif de la courbe traduit une restauration imparfaite du matériau recuit.
Restauration résultant du traitement antérieurement subie par l'éprouvette, cette partie de la courbe $F(\varepsilon)$ correspond aux valeurs de ε comprises entre ε_G et ε_H abscisse du point H ou la courbe rejoint la partie rectiligne que nous appellerons désormais "droite de premier écrouissage.

La branche d'hyperbole traduit une plastification accélérée, qui permet de définir le seuil de fluage établi ε_L à partir duquel $\theta = 1$.
$1/D_1$ représente la pente du segment GH_1 correspondant à la phase "restaurée", appelée"premier gradient de plastification" à la vitesse $\dot{\varepsilon}$ et $1/D_2$ la pente du segment H_2K correspondant à la phase "normale" appelée "second gradient de plastification".
L'intérêt pratique de cette assimilation de pouvoir représenter analytiquement la fonction taux de plastifivation au moins sur un certain intervalle de définition de da déformation

$$\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & 0 < \varepsilon < \varepsilon_G \\ 1 - \exp\left(- \left(\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_G}{\sqrt{2}\, D_1} \right)^2 \right) & \varepsilon_G < \varepsilon < \varepsilon_H \\ 1 - \exp\left(- \left(\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_F}{\sqrt{2}\, D_2} \right)^2 \right) & \varepsilon_H < \varepsilon < \varepsilon_K \end{cases}$$

Nous remarquons aussi que le comportement du matériau au-delà du domaine élastique peut être plus facilement suivit sur la courbe $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ que sur la courbe $\sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, il dépend essentiellement outre λ et n de quatre grandeurs ε_G , ε_H , $\frac{1}{D_1}$, $\frac{1}{D_2}$.

ANNEXE II

DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAU UTILISE A PARTIR D'ESSAI DE TRACTION SIMPLE (A FROID)

I. DISPOSITIF EXPERIMENTAL :

Il s'agit de la machine INSTRON du Laboratoire de mécanique des solides d'ORSAY. La température sera la température ambiante 20°, la déformation totale (éprouvette+machine) est imposée au cours du temps par l'intermédiaire d'une traverse mobile se déplaçant à vitesse constante V_T, le matériau utilisé et un duralumin du commerce AU4G.

II. ESSAI D'ECROUISSAGE :

En fait nous obtenons une courbe (F, Δl) à vitesse constante de déplacement de la traverse, ,ous avons donc à effectuer trois travaux préliminaires :

a) La détermination du module d'YOUNG de la courbe (σ,ε) à partir de l'enregistrement $(F, \Delta l_e)$ aux moyens de jauges.

b) La détermination de la courbe (σ,ε) à partir de l'enregistrement $(F, \Delta l_v)$ en tenant compte de la raideur de la machine.

c) La détermination de $\dot{\varepsilon}$ connaissant V_T vitesse de déplacement de la traverse mobile.

a) DETERMINATION DU MODULE D'YOUNG E :

Nous le déterminons à partir de la partie rectiligne de l'essai d'écrouissage en traction simple (Fig.1) . En utilisant l'enregistrement $(F, \frac{\Delta R}{R})$ donné par la cellule de charge et une jauge métallique (dont la relation entre la variation de longueur et la variation de résistance dépend du facteur de jauge K , par :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l} e = K\varepsilon$$

K étant un facteur donné par le construteur, pour les jauges métalliques , le

nombre est généralement voisin de 2) .

Nous obtenons en utilisant la relation de HOOKE :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S_o}\frac{K}{\Delta R}\frac{R}{} = 7250 \text{ DaN/mm}^2$$

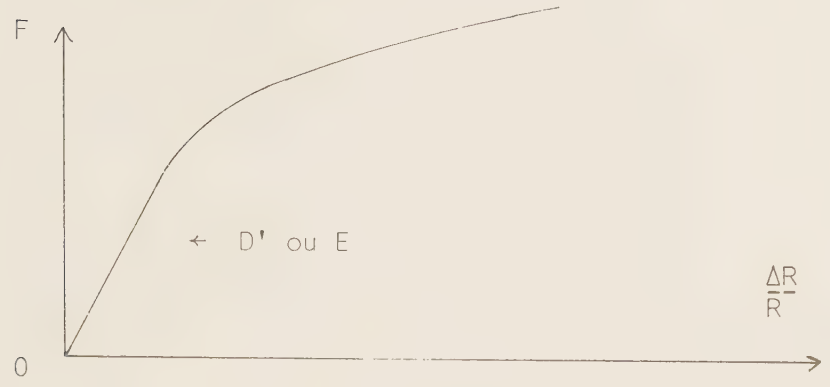


FIGURE 1 .

b) DETERMINATION DE LA COURBE (σ,ε)

La traction uniaxiale s'exprime en fonction de la charge et de la section S. pour un allongement ε, σ varie donc constamment.

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

D'ailleurs S diminue de S_o , jusqu'à la section de rupture, nous devons donc tenir compte des deux contractions orthogonales à la direction de la sollicitation, liées à ε et au coefficient de POISSON ν pour exprimer S en fonction de S_o et θ.

$$S = S_o\left(\frac{1}{(1+\nu\varepsilon)^2} + \frac{\theta}{(1+\nu^*\varepsilon)^2}\right)$$

avec ν : coefficient de POISSON élastique

ν^* : coefficient de POISSON élasto-plastique $\quad \nu < \nu^* < \frac{1}{2}$

mais tout au long de l'essai $\quad \nu = \nu^* = \frac{1}{2}$

donc S devient :

$$S = S_o \left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2 = S_o\,(1-\varepsilon)$$

en revenant à la traction

$$\sigma = \frac{F}{S_o}(1+\varepsilon) \qquad (1)$$

pour l'allongement ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}e$$

avec $\Delta l_e = \Delta l_{\text{éprouvette}} = \Delta l - \Delta l_{\text{machine}}$.

$$\Delta l_m = \frac{F}{K_m}$$

avec k_m : raideur de la machine déterminé par

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_m} + \frac{l_o}{ES_o}$$

avec k : raideur de l'ensemble (éprouvette + machine) déterminé par la pente du domaine élastique de l'essai d'écrouissage ($F, \Delta l_v$).

ou Δl_v : déplacement lu sur le graphique.

donc

$$\Delta l = \frac{V_T}{V_P} \Delta l_v$$

avec V_T : vitesse de déplacement de la traverse mobile.

V_P : vitesse de déroulement du papier.

et $$K = \frac{F}{\Delta l} \rightarrow K_m = \frac{ES_o K}{ES_o - K l_o}$$

donc $$\varepsilon = \frac{l}{l_o} - \frac{F}{K_m l_o} \qquad (2)$$

et la courbe (σ, ε) est représentée sur la (Fig.2)

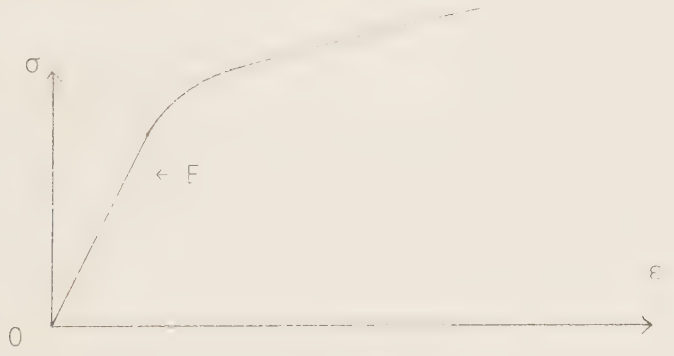


FIGURE II .

c) DETERMINATION DE LA VITESSE DE DEFORMATION : $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(V_T)$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\Delta l}}{l_o} = \frac{\dot{F}}{K_m l_o} = \frac{V_T}{K_m l_o} = \frac{1}{K_m l_o} \frac{dF}{dt}$$

Remarquons que $\dot{\varepsilon}$ prend les formes simplifiées suivantes :

- Dans le domaine élastique

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{d\Delta l} \frac{d\Delta l}{dt} = K V_T$$

soit

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V_T}{l_o} \left(1 - \frac{K}{K_m} \right)$$

- Dans le domaine de fluage établi $\frac{dF}{dt} = 0$

soit $\dot{\varepsilon} = \frac{V}{l_o} T$

III. ESSAI DE RELAXATION :

Après une montée en charge, essai d'écrouissage sur la machine INSTRON, et immobilisation de la traverse mobile, en un point ou Fo et $(\Delta l)_o$ sont connus, nous avons enregistré la variation de F en fonction du temps, l'essai est représenté sur la (Fig.3), le passage de la courbe $F(t)$ à la courbe $\sigma(t)$ se fait en utilisant les relations (1) et (2).

DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DANS LE DOMAINE DE FLUAGE ETABLI (τ, n) :

L'essai de relaxation décrit précédemment a été effectué à $\Delta l = (\Delta l)_o$ et nous nous sommes placés dans des conditions telle que $\varepsilon_o > \varepsilon_G$ (ε_G sera défini numériquement), ce qui nous permet d'utiliser la loi de BAILEY-NORTON

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} = (\tau \dot{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}}$$

Pour un essai de relaxation :

$$\Delta l = l_o \varepsilon + \frac{F}{K_m} = \text{Constante}$$

$$0 = l_o \dot{\varepsilon} + \frac{\dot{F}}{K_m} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \text{et} \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{SE}$$

D' ou $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e = -\frac{\dot{F}}{S}\left(\frac{S}{K_m l_o} + \frac{1}{E}\right)$

$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p(t)$ sera donc calculé par l'intermédiaire dela fonction $\dot{F}(t)$, représentée à tout instant par la pente de la courbe (F, t) voir (Fig.3).

Soit en traçant la courbe $\log\sigma$ en fonction de $\log\dot{\varepsilon}^p$, on obtient

$$\log\lambda = \frac{1}{n}\left(\log\tau + \log\dot{\varepsilon}^p\right)$$

avec $\log\tau$ l'ordonnée à l'origine

$\frac{1}{n}$ la pente de la droite

à partir de la (Fig.4) nous déterminons : $\tau = 4{,}15 \times 10^{-169}$ et $n = 75$

FIGURE III .

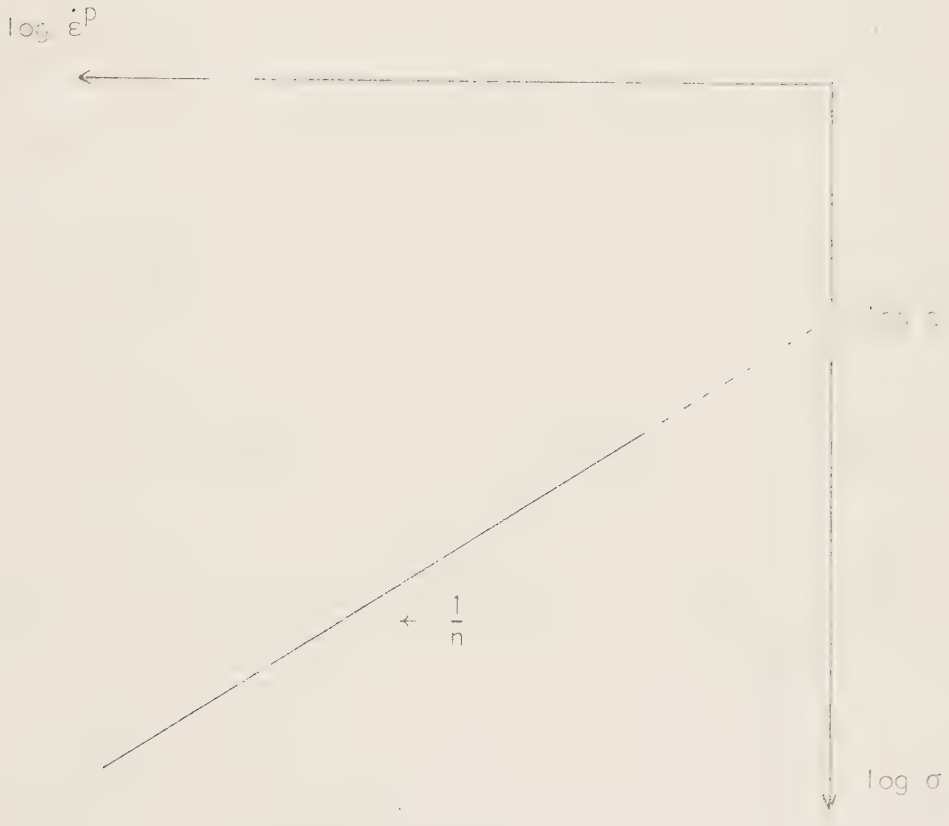


FIGURE IV .

IV. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA FONCTION $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$:

Nous pouvons envisager de déterminer la fonction taux de plastification $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, pour une vitesse de déformation donnée à partir d'essais d'écrouissage " la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ reste constante au cours de l'essai". Nous pouvons la déterminer à partir de la relation :

$$K = \frac{\sigma}{E} = (1 - \theta(\dot{\varepsilon},\dot{\varepsilon}))\ \varepsilon + \int_{\varepsilon-\lambda}^{\varepsilon} \eta_n\left(\frac{\varepsilon-u}{\lambda} \right)\ \theta\ (u,\dot{\varepsilon})\ du$$

avec $\eta_n(x) = 1 - (Z(x))^n$

$$x\ (Z) = \int_0^Z \frac{dZ}{1-Z^n} \qquad 0 < Z < 1$$

La fonction numérique η_n se tabule pour $X > o$, dès que le paramètre n est connu dans le cas n grand devant l'unité (n >>), la loi de comportement se simplifie :

$$K(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \frac{\sigma}{E} = \begin{cases} (1 - \theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}))\ \varepsilon + \int_0^{\varepsilon} \theta(u,\dot{\varepsilon})\ du & 0<\varepsilon\leqslant\lambda \\ (1 - \theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}))\ \varepsilon \quad \int_{\varepsilon-\lambda}^{\varepsilon} \theta(u,\dot{\varepsilon})\ du & \varepsilon>\lambda \end{cases}$$

La fonction θ dépend beaucoup de λ , ceci nécessite la connaissance de la contrainte de fluage établi $E\lambda$, nous pouvons la déterminer expérimentalement à partir des valeurs ε , τ , n , E

$$\lambda = (\tau\ \dot{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}}$$

Nous remarquons ici une première particularité $\theta(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$ est nul jusqu'à la limite élastique vraie ε_G .

Rappelons que K tend théoriquement vers λ + constante , si l'on admet que la constante est nulle quand ε tend vers l'infini, on peut déterminer λ par tâtonnements en cherchant à obtenir $\theta = 1$ en même temps que $\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon} = 0$.

Nous calculons θ pas à pas à partir de l'expression $K(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon)}{ES}$ résultant de l'expérimentation. Le calcul de la fonction $\theta(\varepsilon,\varepsilon)$ (Fig.5) est fait à l'aide d'un programme de calcul mis au point par C. GALHARAGUE. La méthode est résumé dans l'organigramme qui suit.

V. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA FONCTION F ($\varepsilon, \dot{\varepsilon}$) :

Connaissant la représentation analytique de la fonction $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

$$F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \left(-2 L_N \left(1 - \theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour un matériau tel l'AU4G, cette courbe est représentable par deux segments de droite, ce qui justifie l'hypothèse de distribution de RAYLEIGH. On en déduit la fonction taux de plastification $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ donnée, représentation valable jusqu'à ce que la déformation atteigne la valeur ε_L au delà nous considérons en première approximation que la fonction $\theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ vaut identiquement 1;

$$\varepsilon > \varepsilon_L \qquad \theta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \equiv 1 \qquad \forall\, \dot{\varepsilon}$$

On a tracé le résultat du calcul de la fonction $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ (Fig.6) , les résultats expérimentaux nous conduisent à prendre pour valeurs des paramétres intervenant dans l'expression de θ :

ε_G (exp) $= 0{,}52^{*} \times 10^{-2}$ $\qquad$ ε_F exp $= 0{,}325 \times 10^{-2}$ $\qquad$ D_1 exp $= 0{,}24 \times 10^{-2}$

ε_G $= 0{,}33 \times 10^{-2}$ $\qquad$ ε_F $= 0{,}15 \times 10^{-2}$ $\qquad$ D_1 $= 0{,}2 \times 10^{-2}$

D_2 exp : $0{,}54 \times 10^{-2}$

$D_2 = 0{,}45 \times 10^{-2}$

d'où la valeur de $\varepsilon_H = \dfrac{D_2\, \varepsilon_G - D_1 \varepsilon_F}{D_2 - D_1}$

$D_1, \varepsilon_F, \varepsilon_G, \varepsilon_H$, ne dépendant pas au fort peu de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, seul D_2 est sensible à la variation de ce paramètre $D_2 = f(\dot{\varepsilon})$.

REMARQUE :

Les valeurs suivies d'une astérisque ont été obtenues en tenant compte d'un écrouissage préalable des éprouvettes de traction, dû sans doute à l'usinage de celles-ci

En effet, la comparaison des valeurs trouvées expérimentalement à celles communément admises, nous a incité à corriger ces valeurs, en prenant comme limite élastique celle trouvée dans la littérature pour des essais de même type et en utilisant la remarque thèse de NGUYEN CONG HOAN

que

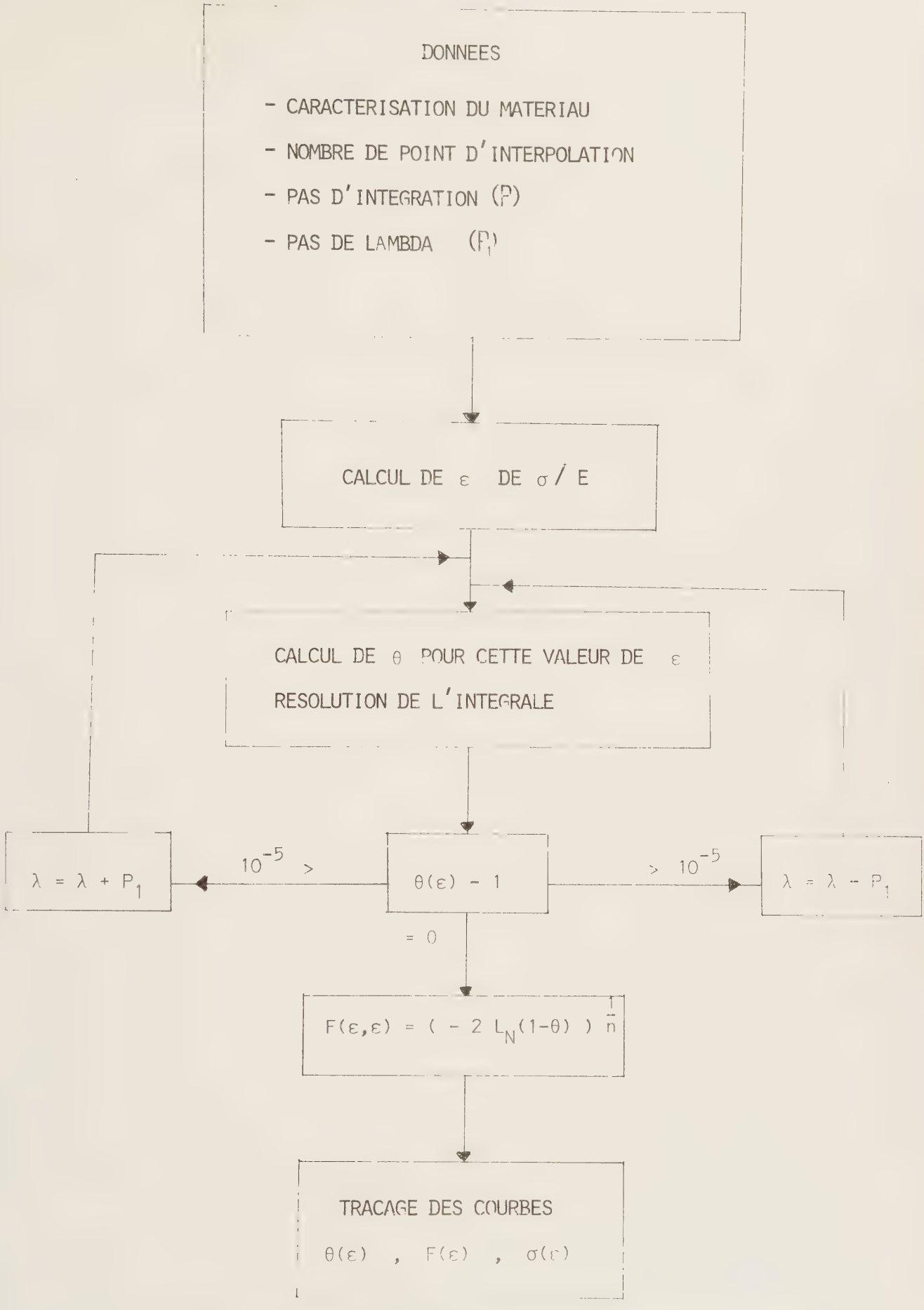
$$\frac{D_1^*}{D_2^*} = \frac{D_1}{D_2}\,\text{exp}$$

Ci-joint outre l'organigramme les courbes représentatives des fonctions

$F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ (Fig.5)

$F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ (Fig.6).

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE CALCUL



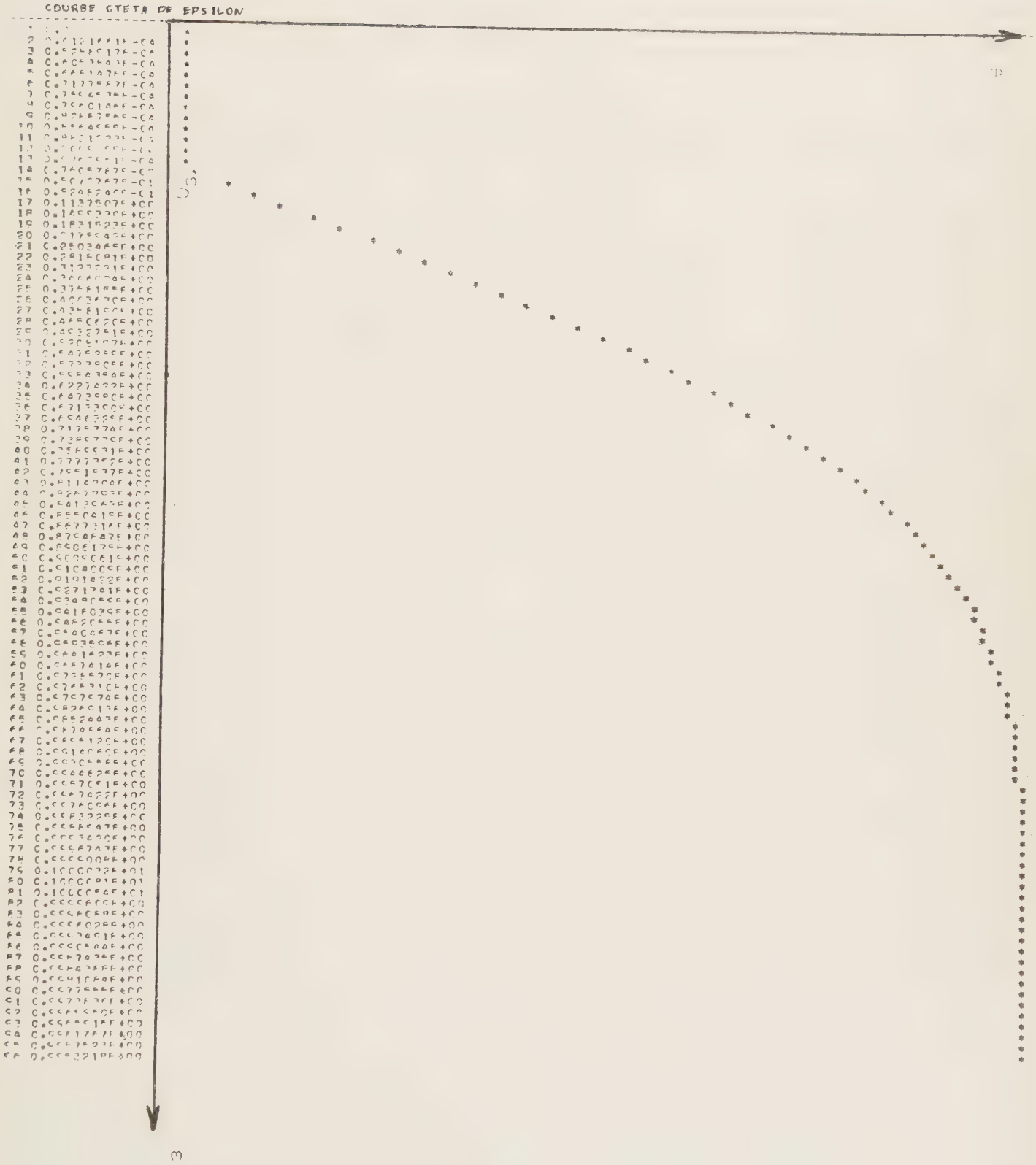


FIGURE V .

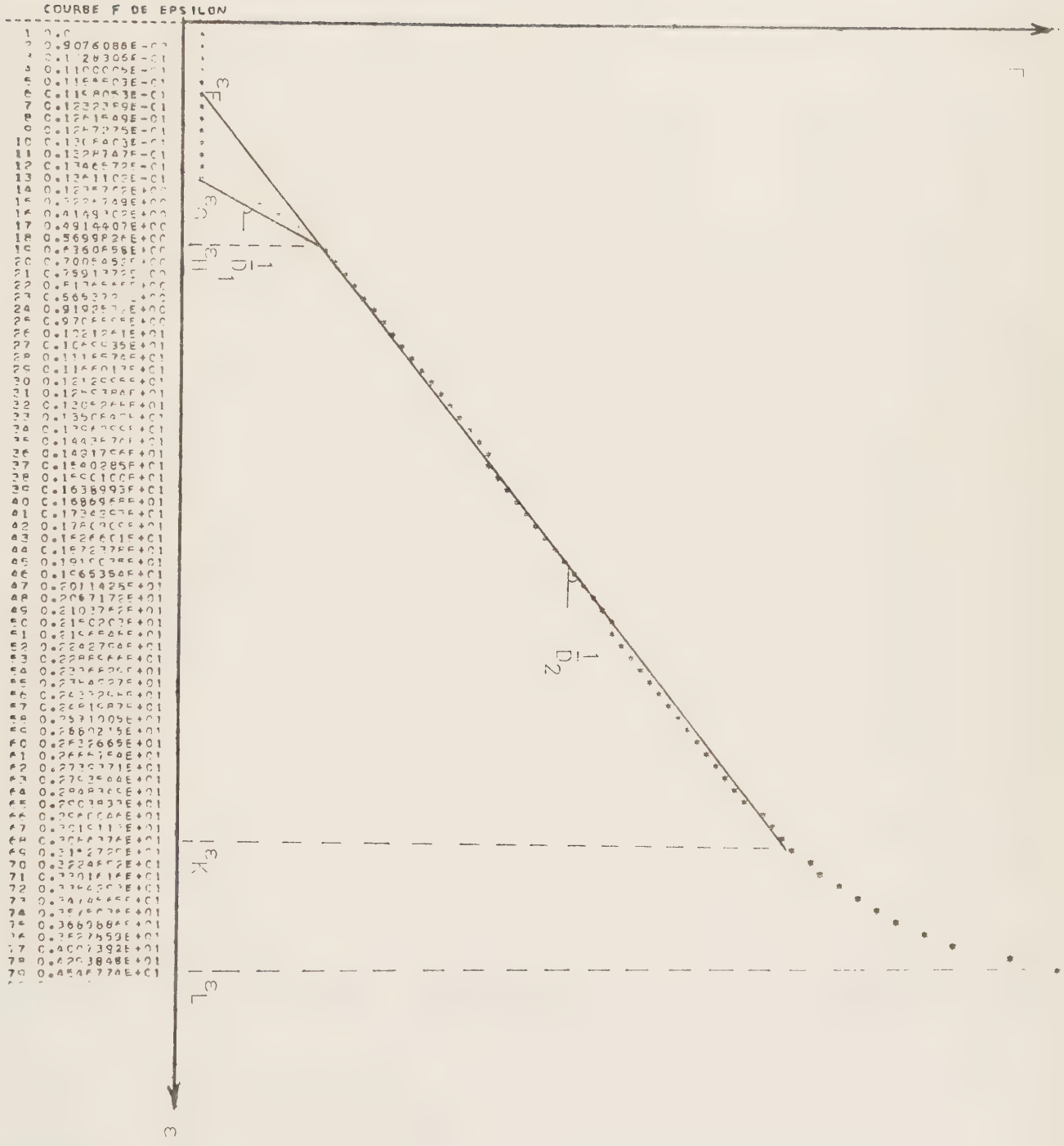

COURBE F DE EPSILON
F
ε
F_3
ε_3
$\frac{1}{D_1}$
$\frac{1}{D_2}$
$\varepsilon_{3'}$
L_3

FIGURE VI .

ANNEXE III

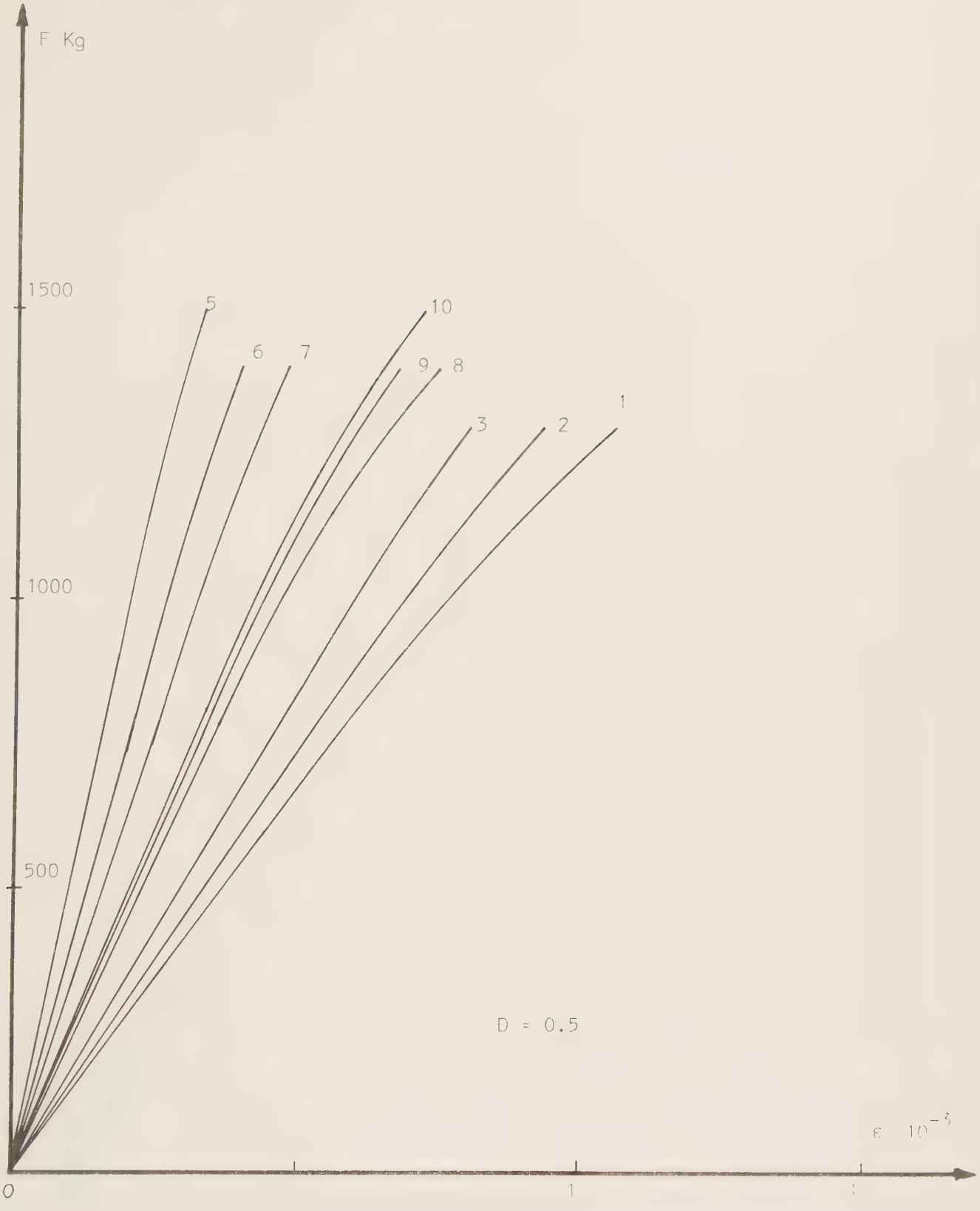


FIGURE 1

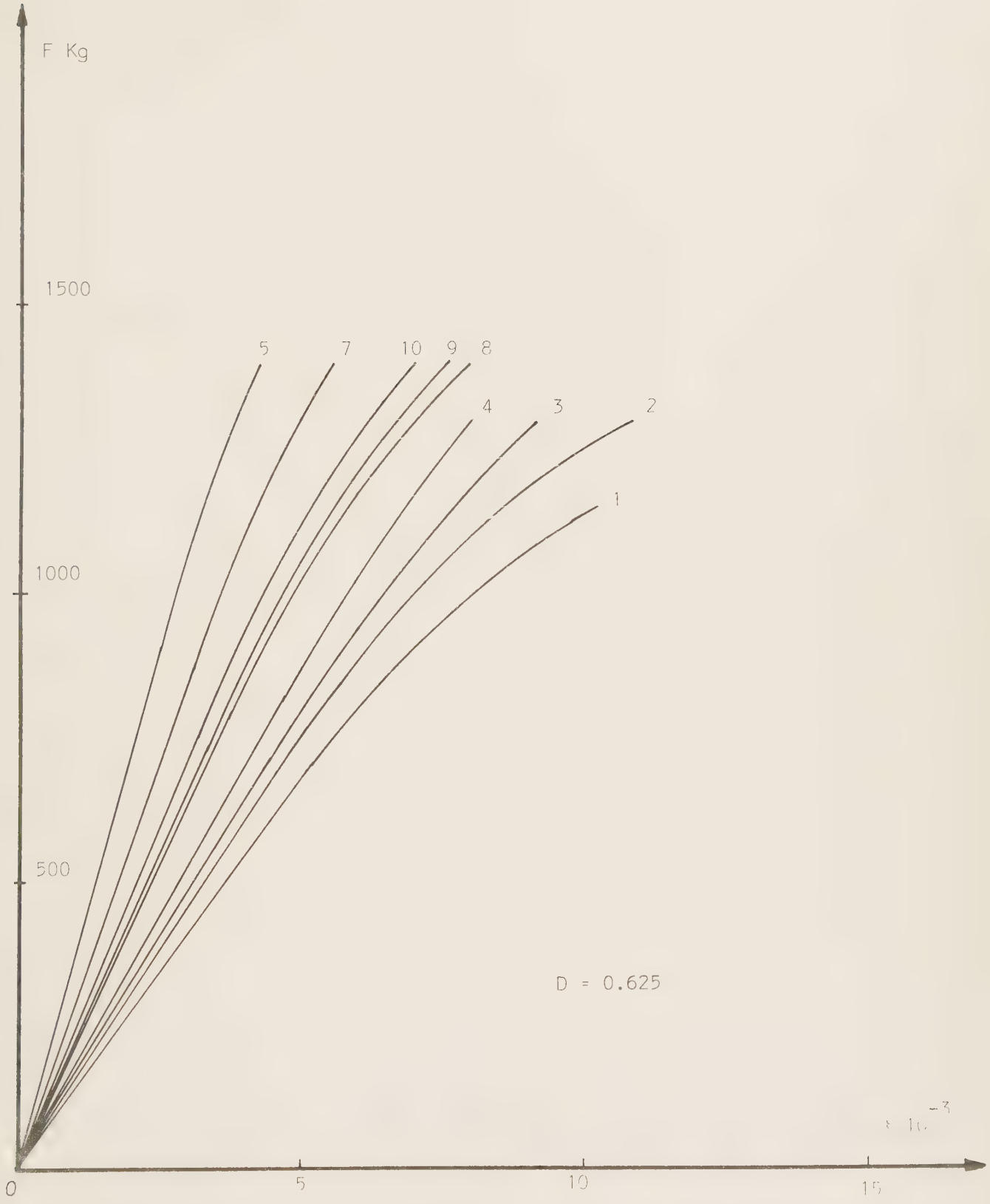


FIGURE 11

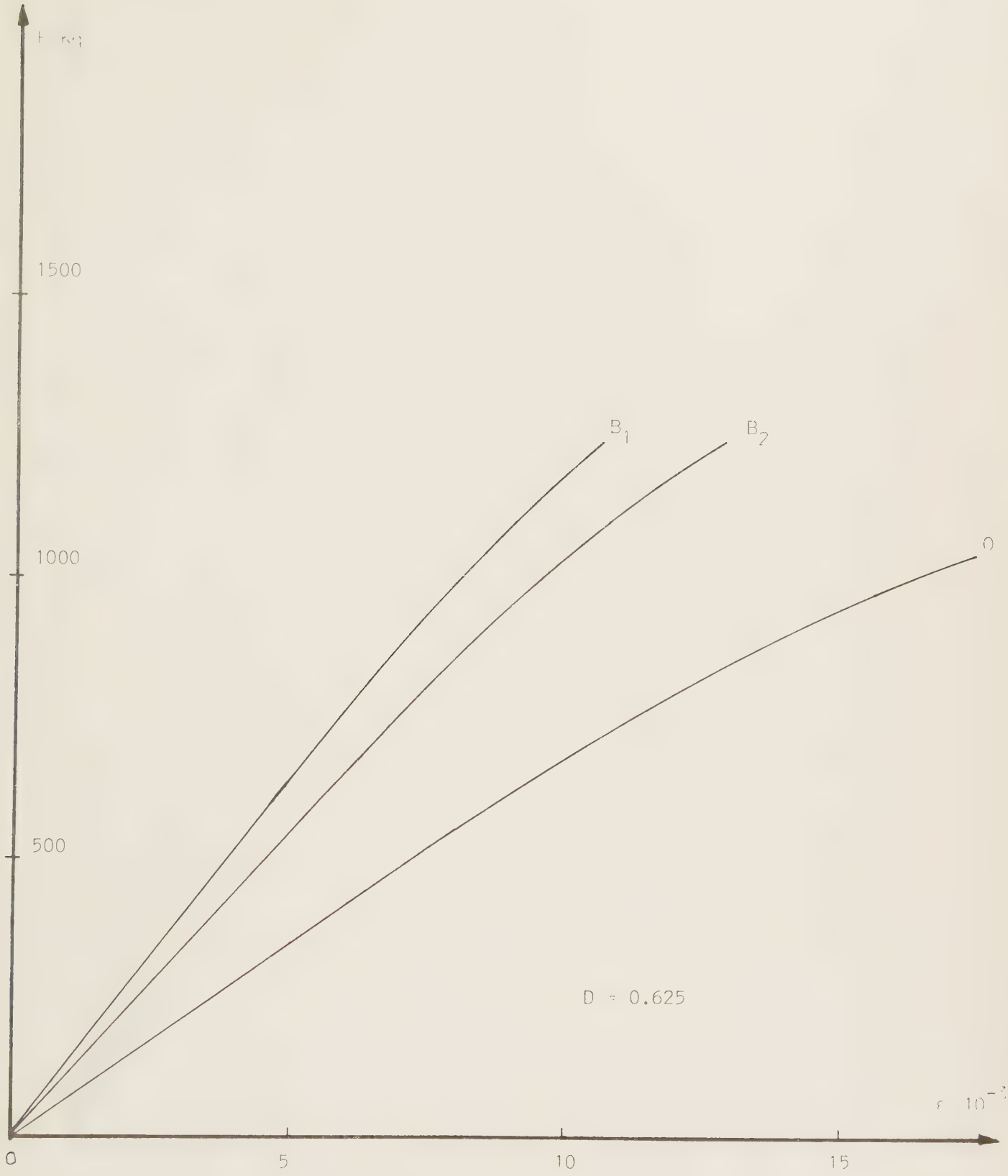


FIGURE III

FIGURE IV

F	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	$\zeta(0)$ cm
100	7,44	6,70	5,92		2,49	3,20	3,50	5,02	4,76	4,56	0,6
	7,41	6,68	5,87		2,47	3,18	3,75	5,00	4,74	4,53	
	7,40	6,66	5,86		2,45	3,16	3,77	4,97	4,71	4,50	
200	14,90	13,40	11,87		4,69	6,10	7,24	9,80	9,26	8,86	1,2
	14,85	13,36	11,84		4,68	6,07	7,18	9,76	9,24	8,82	
	14,84	13,35	11,82		4,68	6,06	7,16	9,70	9,22	8,81	
300	22,07	19,84	17,59		6,75	8,75	10,46	14,36	13,56	12,98	1,8
	22,03	19,80	17,55		6,72	8,71	10,40	14,24	13,48	12,87	
	22,01	19,75	17,52		6,70	8,67	14,34	14,22	13,44	12,63	
400	30,05	27,10	24,25		8,08	10,68	12,94	18,22	17,23	16,45	2,45
	29,93	27,03	24,07		8,00	10,60	12,85	18,08	17,08	16,30	
	29,93	27,00	24,05		7,97	10,57	12,84	18,05	17,05	16,25	
500	37,66	33,96	30,23		10,04	13,31	16,10	22,80	21,54	20,57	3,05
	37,52	33,81	30,08		9,90	13,15	15,93	22,62	21,37	20,38	
	37,48	33,80	30,08		9,87	13,12	15,92	22,60	21,31	20,33	
600	45,17	40,75	36,21		11,84	15,75	19,05	27,20	25,75	24,57	3,7
	45,10	40,73	36,14		11,80	15,70	18,86	27,12	25,64	24,45	
	45,10	40,70	36,10		11,80	15,70	18,95	27,10	25,66	24,45	
700	52,90	47,80	42,30		14,00	18,56	22,50	32,04	30,30	28,95	4,35
	52,78	47,70	42,24		13,95	18,50	22,38	31,95	30,18	28,86	
	52,65	47,61	42,16		13,90	18,46	22,36	31,90	30,14	28,92	
800	60,60	54,76	53,33		16,22	21,45	26,20	36,97	34,91	33,45	5,0
	60,55	54,76	53,27		16,20	21,43	26,11	36,94	34,84	33,38	
	60,50	54,66	53,20		16,17	21,38	25,94	36,90	34,80	33,35	
900	68,50	61,71	54,30		18,45	24,38	29,50	41,93	39,46	37,80	5,7
	68,41	61,60	54,27		18,40	24,30	29,43	41,84	39,38	37,75	
	68,35	61,54	54,17		18,38	24,30	29,42	41,83	39,37	37,74	
1000	76,85	68,94	60,47		20,59	27,15	32,93	47,14	44,12	42,36	6,4
	76,73	68,75	60,35		20,53	27,07	32,87	47,08	44,02	42,30	
	76,67	68,73	60,26		20,49	27,06	32,73	47,03	43,97	42,24	
1100	85,44	76,28	66,63		22,69	29,90	36,20	52,68	48,95		7,1
	85,37	76,20	66,50		22,62	29,93	36,10	52,62	48,84		
	85,33	76,10	66,40		22,58	29,80	36,06	52,54	48,80		
1200	91,96	84,32	73,22		24,94	32,83	39,68	59,03	54,54	52,42	7,85
	95,20	84,42	73,20		24,91	32,84	39,61	59,06	54,52	52,40	
	95,23	84,44	73,26		24,88	32,80	39,60	59,05	54,49	52,38	

TABLEAU I

SUITE D = 0,5

F	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	$\varepsilon(0)$
1300	103,80*	93,16*	80,33*		27,25	35,82*	43,38*	66,22*	60,85*	58,54	8,7
	165,98	93,26	80,37		27,24	35,85	43,40	66,34	60,94	58,50	
	106,08	93,38	80,44		27,20	35,86	43,41	66,36	60,96	58,45	
1400	117,30**	101,50*	87,00*		29,45	38,94*	47,14**	73,35**	67,41*	64,77	9,6
	117,36	101,61	87,04		29,40	39,06	47,16	74,00	67,47	64,70	
	117,26	101,65	87,09		29,38	39,08	47,13	73,94	67,52	64,65	
1500	134,27	104,56	94,40		32,48	42,16	51,20	83,15	75,62	72,56	10,7
	134,16	100,35	94,46		32,46	42,20	51,18	83,08	75,65	72,52	
	133,97	99,08	94,42		32,40	42,14	51,10	83,00	75,61	72,48	

* = croissance de la déformation.

* * = diminution de la déformation.

Remarque :

1 - Les déformations sont exprimées en 10^{-4} .

2 - La jauge J_4 s' est décollée .

D = 0,625

F	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	Z (0) cm
100	7,48	6,56	6,15	5,63			3,74	4,90	4,63	4,32	0,6
	7,42	6,47	6,10	5,60			3,70	4,88	4,62	4,30	
	7,41	6,46	6,10	6,59			3,70	4;87	4,60	4,27	
200	14,95	13,12	12,42	11,40			7,26	9,61	9,08	8,46	1,2
	14,91	3,03	12,34	11,34			7,24	9,55	9,04	8,42	
	14,87	12,98	12,30	11,30			7,23	9,55	9,00	8,40	
300	22,14	19,35	18,34	16,82			10,65	14,20	13,40	12,52	1,8
	22,06	19,25	18,27	16,78			10,71	14,14	13,35	12,45	
	21,99	19,18	18,24	16,74			10,63	14,11	13,34	12,41	
400	29,42	25,76	24,47	22,96			13,90	18,72	17,68	16,50	2,3
	29,30	25,68	24,40	22,40			13,88	18,68	17,65	16,46	
	29,21	25,61	24,37	22,37			13,98	18,65	17,62	16,45	
500	36,71	32,31	30,70	28,18	15,16		17,28	23,28	22,00	20,57	3
	36,58	32,20	30,64	28,10	15,10		17,24	23,24	21,94	20,50	
	36,47	32,10	30,56	28,06	15,10		17,26	23,16	21,90	20,46	
600	44,00	38,94	36,94	33,92	17,52		20,94	28,00	26,50	24,79	3,6
	43,98	38,90	36,93	33,93	17,52		20,90	28,00	26,54	24,80	
	43,92	38n83	36,90	33,90	17,50		20,90	27,96	26,49	24,76	
700	51,55	45,80	43,26	39,75	19,87		24,36	32,80	31,10	29,10	4,2
	51,43	45,70	43,20	39,70	19,85		24,43	32,75	31,06	29,08	
	51,28	45,57	43,12	39,64	19,80		24,42	32,70	31,00	29,02	
800	59,68	53,12	49,75	45,70	22,14		27,90	37,59	35,70	33,47	4,9
	59,60	53,03	49,72	45,68	22,11		27,82	37,55	35,66	33,43	
	59,50	52,94	49,64	45,63	22,04		27,80	37,50	35,63	33,39	
900	69,04	61,08	56,56	51,76	24,50		31,42	42,57	40,44	37,90	5,6
	69,00	60,98	56,50	51,74	24,48		31,35	42,54	40,42	37,88	
	68,90	60,90	56,44	51,68	24,47		31,33	42,50	40,40	37,86	
1000	81,00	69,78	63,95	58,06	27,17		35,28	48,00	45,64	42,70	6,3
	79,94	69,58	63,80	57,86	27,04		35,05	47,80	45,47	42,54	
	79,86	69,52	63,76	57,84	27,02		34,95	47,76	45,44	42,50	
1100	93,27	79,43	71,77	64,35	29,87		39,10	53,80	51,09	47,63	7,1
	93,24	79,27	71,13	64,20	29,80		39,02	53,70	51,01	47,56	
	93,14	79,14	71,54	64,12	29,76		38,90	53,60	50,94	47,47	
1200	112,80	92,50	80,88	71,36	33,32		43,75	61,12	57,98	53,78	8,9
	112,85	92,28	80,70	71,19	33,26		43,67	61,11	57,91	53,78	
	112,86	92,17	80,03	71,13	33,24		43,40	60,96	57,81	53,73	

SUITE D = 0,625

F	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	Z(0) cm
	139,[illegible]*	108,50*	91,40	[illegible]8,49	37,56		49,34	[illegible]0,00	66,44	61,49	9,5
	139,[illegible]	108,56	91,18	[illegible]8,27	37,50		49,1[illegible]	[illegible]9,85	66,36	61,40	
	139,[illegible]	108,60	91,06	[illegible]8,17	37,50		49,14	69,60	66,30	61,35	
1400	173,[illegible]*	127,56*	102,78	85,50	41,88		55,0[illegible]	79,24	75,32	69,69	10,9
	173,1[illegible]	127,60	102,48	85,20	41,80		54,87	[illegible]9,04	75,21	69,47	
	173,06	127,62	102,34	85,10	41,77		45,86	[illegible]8,95	75,14	69,40	

* = croissance de la déformation.

* * = diminution de la déformation.

Remarque :

1 - Les déformations sont exprimées en 10^{-4}

2 - La jauge J_6 s' est décollée .

BIBLIOGRAPHIE

[1] COURBON J. Résistance des matériaux. DUNOD Paris 1965 Tome II.

[2] MANDEL J. Cours de Mécanique des Milieux Continus. GAUTHIER-VILLARS Editeur. Paris 1966.

[3] MAZET R.

- Sur la représentation dynamique d'une structure lamellaire soumise à une charge qui provoque un fluage localisé. "Extrait des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences". t :256 P. 2971-2975. Séance du 1er Avril 1963

- Vibration d'une structure lamellaire sous fluage localisé "International symposium on stress waves in an elastic solids. Brouin University April 1963.

- Sur la normalité de la fonction de fluage lors d'essais de traction à un dural à 200°C. "Communication présentée au symposium I.U.T.A.M. sur la Thermo-inélasticité. Glasgow Juin 1968.

- Sur les paramètres élasto-plastiques d'un matériau métallique "Extrait de la Recherche Aérospatiale, N° 128 Janvier-Février 1969.

- Sur la détermination des caractéristiques de fluage d'un matériau hétéroplastique par l'essai de traction isotherme à vitesse constante. "Communication présentée au symposium I.U.T.A.M. GOTHENBURG 1970.

- L'hétéroplasticité des matériaux métalliques. "Revue Française de Mécanique N° 43. 1972.

- Fluage localisé d'une poutre hétéroplastique soumise à des charges dépassant la limite élastique vraie. "Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, série des sciences techniques. v : XXI N° 5, 1973.

- Sur une conception hétérogène des milieux solides travaillant au delà du domaine élastique. "Office National d'études et de Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.).

OUVRAGES CONSULTES

GALHARAGUE C. — Loi de comportement hétéroplastique appliquée aux phénomènes de fluage et de relaxation (Thèse ORSAY 1975).

NGUYEN CONG HOAN — Modification des caractéristiques mécaniques d'un duralumin du commerce par étirements successifs. (Thèse ORSAY 1972).

SALENCON J. — La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane (Thèse PARIS VI 19

SCREPEL J. — Etude du fluage progressif d'une poutre en flexion Définition de domaines phénoménologiques et géométriques. (Thèse ORSAY 1973).